ПРАВИТЕЛЬСТВО САНКТ-ПЕТЕРБУРГА
КОМИТЕТ ПО ОБРАЗОВАНИЮ САНКТ-ПЕТЕРБУРГА
СПБ ГБПОУ ПРОМЫШЛЕННО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ

ДИСЦИПЛИНА: МАТЕМАТИКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Санкт-Петербург
2015

УДК
ББК
ISBN

Рецензенты:
Демидова Н.З., старший преподаватель кафедры ЕНО, к.п.н., ГБУ ДПО СПб АППО.
Гайдуков М.М., ст.н.с. каф. ФЭТ СПбГЭТУ «ЛЭТИ», к.т.н.

Учебное пособие по дисциплине: Математика

Составитель: Грешилова В.А.
(преподаватель высшей категории)

Данное учебное пособие разработано в соответствии с рабочей программой учебной дисциплины естественно-научного цикла «Математика» и предназначено для реализации ФГОС специальностей технического профиля.

В представленном пособии излагаются важнейшие идеи математического анализа, рассматриваются основные разделы дифференциального и интегрального исчисления: пределы, производные, исследование функций одной переменной, неопределённые и определённые интегралы, приложение интегрального исчисления, действия над матрицами и решения систем линейных уравнений матричным способом, основные понятия теории вероятности и математической статистики, дискретной математики и теории комплексных чисел.

При подборе материала соблюдается преемственность в обучении единство терминологии и обозначений в соответствии с действующими федеральными государственными стандартами.

При подборе практических заданий использовались различные сборники задач по высшей математике, в частности, «Задачник по высшей математике В.С. Шипачёва, а так же примеры разработанные автором данного пособия – преподавателем математики СПБ ГБПОУ «Промышленно-технологический колледж» Грешиловой В.А.

Пособие может быть использовано как в работе преподавателей математики, так и для самостоятельного изучения материала обучающихся колледжа. На базе данного пособия возможна организация дистанционного обучения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

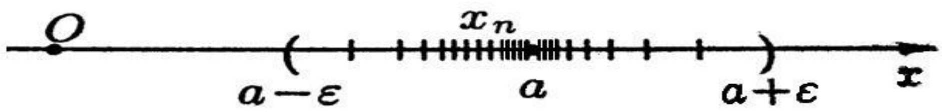
Раздел I. Задачи на вычисление пределов
§1. Предел последовательности

Определение. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительно ε го числа найдется такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$

Пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

Графически это выглядит так:

$|x_n - a| < \varepsilon, \quad a - \varepsilon < Xn < a + \varepsilon$



Т.е.

элемент x_n находится в ε - окрестности точки a. При этом последовательности $\{x_n\}$ называется сходящейся, в противном случае – расходящейся.

Основные свойства сходящихся последовательностей

1)Сходящаяся последовательность ограничена.

2)Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, тогда а) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a + b;$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \times y_n) = a \times b;$ в) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n / y_n) = a/b (b \neq 0).$

3)Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,$ $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n = a$ и для всех n выполняется неравенства $x_n \le y_n \le Z_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a\,.x$

4) Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и последовательность $\{y_n\}$ - ограниченная, то $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = 0$

§2. Бесконечно большие и бесконечно малые функции

Определение. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

Например: 1) $y = x - 2$ при $x \to 2$ б. м. ф. т.к. $\lim\limits_{x \to 2}(x-2) = 0$ 2) $y = \sin x$ при $x \to -\pi$ б. м. ф. т. к $\lim\limits_{x \to -\pi} \sin x = 0$

Определение. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

Например, $y = 2^x$ есть б. б. Ф при $x \to \infty$; $y = \dfrac{1}{x-4}$ если б. б. ф. при $x \to 4$ действительно $\lim\limits_{x \to \infty} 2^x = \infty$ и $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{1}{x-4} = \infty$

Теорема (о связи между функций, ее приделом и бесконечно малой функцией). Если функция $y = f(x)$ имеет придел, равный A, то ее можно представить как сумму числа A и бесконечно малой функции $\alpha(x)$, т.е. если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A,$ *то* $f(x) = A + \alpha(x).$

Теорема (обратная). Если функцию $y = f(x)$ можно представить в виде суммы числа А и б.м.ф. α(x), то число А является пределом функции $y = f(x)$, т.е если $f(x) = A + d(x)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Например, требуется вычислить $\lim\limits_{ч \to \infty} \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{4x^2 + 2x + 5}$. Представим числитель и знаменатель в виде суммы числа и б.м.ф. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} + \frac{5}{x^2}} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}$

Функции $y = \dfrac{3}{x}, y = \dfrac{1}{x^2}, y = \dfrac{2}{x}, y = \dfrac{5}{x^2}$ при $x \to \infty$ есть б.м.ф. таким образом

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

2.1. Основные теоремы о пределах

Теорема 1. Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x^0}g(x)$$

Теорема справедлива для алгебраической суммы любого конечного числа функций.

Теорема 2. Функция может иметь только один предел при $x\to x_0$.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$$

Теорема 3. Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\times g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)\times\lim_{x\to x_0}g(x).$$

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to x_0}(cf(x))=c\lim_{x\to x_0}f(x)$$

Следствие 2. Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела: $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^n=(\lim\limits_{x\to x_0}f(x))^n$.

Теорема 4. Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}\quad(\lim_{x\to x_0}g(x)\neq 0)$$

Примеры:

1) $$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+6x+8}{x^3+8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x+4)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\lim_{x\to -2}\frac{x+4}{x^2-2x+4}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{\lim\limits_{x\to -2}(x+4)}{\lim\limits_{x\to -2}(x^2-2x+4)}=\frac{-2+4}{(-2)^2-2(-2)+4}=\frac{1}{6}$$

2) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-4}{x-2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}=\frac{3-\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}}=$$

$$=\frac{3-0}{1-0}$$

3) $$\lim_{x\to 1}(x^2-7x-8)=\lim_{x\to 1}x^2-\lim_{x\to 1}7x-\lim_{x\to 1}8=\left(\lim_{x\to 1}x\right)^2-7\lim_{x\to 1}x-8=$$

$$=1-7-8=-14.$$

2.2. Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

2.3. Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e \quad \text{или} \quad \lim_{d\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$$

Примеры:

Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\times\sin 3x}{3x}=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{sim3x}{3x}=3\times 1=3$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3 2x}{8x^3}=(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x})^3=1^3=1$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{4}{x})^{x+1}=\left|\begin{array}{l}x=4t\\ x\to\infty\\ t\to\infty\end{array}\right|=\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{4}{4t})^{4t+1}=\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{1}=$

$=(\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{t})^4\times\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})=e^4\times 1=e^4$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{5x}\right)^{2x}=\left|\begin{array}{l}5x=-t\\ x=\frac{-t}{5}\\ x\to\infty\\ t\to\infty\end{array}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{-2t}{5}}=\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{-\frac{2}{5}}=e^{-\frac{2}{5}}$

<u>Упражнения:</u>

№ 1 Найти предел:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{3n^2-1}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-3}{n^2+1}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+4}{n^2+5}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n^3}{n^2+1}-\frac{3n^2}{3n-1})$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{5n+11}+\frac{\cos n}{10n})$
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n}{n^2+1}$
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n}{n+1}$
8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n^3}{n^2+1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{n-\sqrt{n}}$

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5\times 3^n}{3^n-2}$

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!-n!}$

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\times \sin n!}{n^2+1}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n+1}$

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$

16. $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{5n}{n+1}+\frac{\sin n}{n})$

17. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

18. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1})$

19. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n-1}-\sqrt{n^n-n+1})$

20. $\lim\limits_{n\leftarrow\infty} n^2(n-\sqrt{n^2+1})$

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+3+.....+n}{n^2}$

22. $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+.....+\frac{1}{2^n})$

23. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+....+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+....+\frac{1}{3^n}}$

№2. Найти пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^{n+4}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^{n+1}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} (1-\frac{5}{n})^{n}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} (1-\frac{1}{3n})^{n}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} n[\ln(n+3)-\ln n]$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} n[\ln n-\ln(n+2)]$

7 $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{4}{n})^{n+3}$

8. $\lim\limits_{n\leftarrow\infty} (\frac{n}{n+1})^{n}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{2}{n})^{3n}$

№3. Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 5x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}$
5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$
6. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$
7. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+2x+3}{2x^2+3+4}$
8. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+3}{2x^2+3x+4}$
9. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+5}{x^2+3}$
10. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3-7x}{1-2x^3}$
11. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x-3}{x^2+2}$
12. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3+4}{x^2+5}$
13. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$
14. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$
15. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\cos x-\sin x}$
16. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(x^2+1)^{50}}{(x+1)^{100}}$
17. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{tg 2x}{\sin 4x}$
18. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 10x}{\sin 9x}$
19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$
20. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$
21. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$
22. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

§3. Непрерывность функций. Точки разрыва и их классификация

3.1. Непрерывность функции в точке

Определение. Пусть функция $y=f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x)$.

Пример. Докажите с помощью определения непрерывности функции в точке, что функция y=3x^2+2x-1 непрерывна в точке x_0=1.

Доказательство:

y(1)=$3\times1^2+2\times1-1=3+2-1=4$

$$\lim_{x\to1}(3x^2+2x-1)=4$$

Данная функция непрерывна в точке $x_0=1$.

3.2. Непрерывность функции в интервале и на отрезке

Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в интервале (a;b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция $y=f(x)$ называется непрерывной на отрезке [a; b], если она непрерывна в каждой точке интервала (a;b), при x =a непрерывна справа, (т.е. $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=f(a)$), а в точке, x =b непрерывна слева (т.е. $\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=f(b)$).

3.3. Точки разрыва функции и их классификация

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются точками разрыва этой функции.

Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первого и второго рода.

Точка x_0 называется точкой разрыва первого рода, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа.

Точка x_0 называется точкой разрыва второго рода функции, если по крайней мере один из односторонних пределов (слева или справа) не существует или равен бесконечности.

Примеры:

1) $y=\dfrac{1}{x-2};x_0=2$

$$\lim_{x\to2+0}\frac{1}{1x-2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to2-0}\frac{1}{x-2}=-\infty$$

$\Rightarrow$ x_0 =2 точка разрыва второго рода.

2) $y = \dfrac{|x-3|}{x-3}; x_0 = 3$

$$\lim_{x\to 3+0}\frac{|x-3|}{x-3}\lim_{x\to 3+0}\frac{x-3}{x-3}=1$$

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{|x-3|}{x-3}=\lim_{x\to 3-0}\frac{-(x-3)}{x-3}=-1$$

$\Rightarrow$ x_0 =3 точка разрыва первого рода.

Найти точки разрыва функции и указать их род:

1) $y = \dfrac{|x-5|}{x-5}$; 2) $y = \dfrac{2+7x}{(2x-3)(x+9)}$ 3) $y = \dfrac{3x^2-9x}{(x+3)(x-8)}$

4) $y = \dfrac{x^2-36}{x-6}$; 5) $y = \dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$; 6) $y = x^3+2x^2-3x+1$

Упражнения

№1. Найти точки разрыва функции и определить их род.

1) $y = \dfrac{x}{x-3}$; 2) $y = x-1$; 3) $y = \dfrac{1}{x+2}$; 4) $y = \dfrac{|x-3|}{x-3}$;

5) $y = \dfrac{x}{x+4}$; 6) $y = \sin x + \cos x$; 7) $y = \dfrac{1}{(x-2)(x+3)}$; 8) $y = \dfrac{|x-12|}{x-12}$;

9) $y = \dfrac{x}{x+6}$; 10) $y = \dfrac{|x+1|}{x+1}$; 11) $y = \dfrac{x+2}{x+5}$; 12) $y = \dfrac{|x+11|}{x+11}$;

13) $y = \dfrac{x+2}{x-5}$; 14) $y = \dfrac{|x-4|}{x-4}$; 15) $y = \dfrac{1}{x^2-6+8}$; 16) $y = \dfrac{|x+6|}{x+6}$;

17) $y = \dfrac{15x}{x^2-9}$; 18) $y = \dfrac{|x-9|}{x\ \ -9}$; 19) $y = \dfrac{6}{(x-1)(x+3)}$; 20) $y = \dfrac{|x-4|}{x-4}$.

§4. Эквивалентные бесконечно малые функции

Две б.м.ф. сравниваются между собой при с помощью их отношения.

Пусть $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(x)$ есть б.м.ф. при $x \to x_0$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$.

1. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = A \neq 0 \; (A \in R)$, то α и β называются бесконечно малыми одного порядка.

2. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = 0$, то α называется бесконечно малой более высокого порядка чем β.

3. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = \infty$, то α называется бесконечно малой более низкого порядка, чем β.

4. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta}$ не существует, то α и β называются несравнимыми бесконечно малыми.

5. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = 1$, то α и β называются эквивалентными бесконечно малыми при $x \to x_0$; это обозначается $\alpha \sim \beta$.

Теорема: Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой.

Теорема: Разность двух эквивалентных бесконечно малых функций есть бесконечно малая более высокого порядка, чем каждая из них.

Теорема: Сумма конечного числа бесконечно малых функций разных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.

Слагаемое, эквивалентное сумме бесконечно малых, называется **главной частью этой суммы**.

Замена суммы б.м.ф. ее главной частью называется **отбрасыванием бесконечно малых высшего порядка.**

Пример:

Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+7x^2}{\sin 2x}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+7x^2}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$, поскольку

$3x+7x^2 \sim 3\text{x}$ и $\sin 2x \sim 2\text{x}$ при $x\to 0$.

4.1. Применение эквивалентных бесконечно малых функций

Для раскрытия неопределённостей вида $\dfrac{0}{0}$ часто бывает полезным применять принцип замены бесконечно малых эквивалентными и другие свойства эквивалентных бесконечно малых функций.

Ниже приведены **важнейшие эквивалентности,** которые используются при вычислении пределов:

Важнейшие эквивалентности:

$1.\sin x \sim x(x\to 0);$	$7.a^x-1 \sim x\ln a(x\to 0);$
$2.tgx \sim x(x\to 0);$	$8.\ln(1+x) \sim x(x\to 0);$
$3.\arcsin x \sim x(x\to 0);$	$9.\log_a(1+x) \sim x\times\log_a e(x\to 0);$
$4.arctgx \sim x(x\to 0);$	$10.(1+x)^k-1 \sim k\times x$
$5.1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}(x\to 0);$	$R>0(x\to 0)$
$6.e^x-1 \sim x(x\to 0);$	

Примеры:

С помощью замены на эквивалентные найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 5x}=\left|\ln(1+3x)\sim 3;\ \ \sin 5x\sim 5x\right|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\text{x}}{5\text{x}}=\dfrac{3}{5}.$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{\frac{x^2}{4}}=4\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-4\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=$$

$$=-4\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=-2.$$

3) $$\lim_{x\to 3}\frac{\log_3 x-1}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\log_3 x-\log_3 3}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\log_3\frac{x}{3}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{\ln\frac{x}{3}}{\ln 3}}{x-3}$$

$$=\frac{1}{\ln 3}\lim_{x\to 3}\frac{\ln\left[1+\left(\frac{x}{3}-1\right)\right]}{x-3}==\frac{1}{\ln 3}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{3}-1}{x-3}=\frac{1}{3\ln 3}.$$

4) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x+x^2}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Упражнения

Пользуясь методом замены бесконечно малых эквивалентами, найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{2x^2}$

2 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 3x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\sin x}{\sin 2x}\right)^{\frac{1}{x}-2}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}(e^{3x}+x)^{\frac{1}{x}}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{\ln\cos x}}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\sin(x-1)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 7x-1}{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}$

9. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{arctg(2x-1)}{4x^2-1}$

10. $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$

11. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{\sqrt{3x^2+1-1}}$

12. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[4]{1+x}-1}{\sqrt[5]{1+2x}-1}$

13. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt[7]{x}-1}{\sqrt[8]{x}-1}$

14. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin^2 3x}{\sqrt{1-3x^2}-1}$

15. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sqrt[5]{\cos 2x}-1}$

16. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{(\sqrt[5]{x}-1)(2^{x-1}-1)}{\cos(x-1)-1}$

17. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^{\frac{4}{5}}-1}{x^{\frac{3}{2}}-1}$

18. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{3x}$

19. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{\sin^2 3x}$

20. $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln x-1}{x-e}$

21. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\ln tgx}{\cos 2x}$

22. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln\cos\alpha x}{\ln\cos\beta x}$

23. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\ln(\log_2 x)}{x-2}$

24. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\ln(\lg x)}{1-ctgx}$

25. $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{4^x-64}{x-3}$

26. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{-2x}-1}{\arcsin x}$

26. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{3x}-1}{e^{5x}-1}$

27. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2^x-1}{3^x-1}$

28. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{3^{tgx}-3^{\sin x}}{(tg(x/2))^3}$

29. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{4^{x-2}-1}{3^{x-2}-1}$

30. $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{5^x-5^5}{arctg(x-5)}$

31. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt[5]{x}-1}{e^{x-1}-1}$

32. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+\sin x)}{2^{\sin 3x}-1}$

33. $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\dfrac{3x-1}{3x-6}$

34. $\lim\limits_{x\to0} (\dfrac{x+1}{x^2})^x$

35. $\lim\limits_{x\to\infty} (\dfrac{2x+3}{2x+1})^{x+1}$

§5. Решение примеров на вычисление производных и дифференциалов

5.1. Правила дифференцирования

1) $(u \pm \upsilon)' = u' \pm \upsilon'$;

2) $(u \times \upsilon)' = u' \times \upsilon + \upsilon' \times u$, в частности $(cu)' = cu'$;

3) $(\frac{u}{\upsilon})' = \frac{u' \times \upsilon - \upsilon' \times u}{\upsilon^2}$;

4) $y'(x) = y'(u) \times u'(x)$, если $y = f(u), u = \varphi(x)$;

5) $y'(x) = \frac{1}{x'(y)}$, если $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$.

5.2. Формулы дифференцирования

1.$(C)' = 0$

2.$(u^\alpha)' = \alpha \times u^{\alpha-1}$, в частности, $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$;

3.$(a^u)' = a^u \ln a$, в частности, $(e^u)' = e^u$;

4.$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a}$, в частности, $(\ln u)' = \frac{1}{u}$;

5.$(\sin u)' = \cos u$; 6.$(\cos u)' = -\sin u$; 7.$(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u}$; 8.$(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u}$;

9.$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$; 10.$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$; 11.$(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2}$;

12.$(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2}$;

Примеры нахождения производной элементарных функций:

$y = \left(x^3 + 3x^2 - 5\right) \times e^x$;

1) $y' = \left(3x^2 + 6x\right) \times e^x + \left(x^3 + 3x^2 - 5\right) \times e^x =$

$\left(2x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 4x\right) \times e^x$.

$y = xarctgx - \frac{1}{2}\ln x$;

2) $y' = (x)' arctgx + x(arctgx)' - \frac{1}{2} \times \frac{1}{x}' =$

$= arctgx + \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2x}$

3) $y = \frac{(x^2-1)}{(x^2+1)}$;

$$y' = \frac{(x^2-1)'(x^2+1) - (x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2+1) - (x^2+1) \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}.$$

4) $y = x^5 - \cos x$, *найти* $y'(0)$

$y' = 5x^4 + \sin x$, $y'(0) = 5 \times 0^4 + \sin 0 = 0 + 0 = 0$

5.3. Производная сложной и обратной функций

Определение. Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ - сложная функция с промежуточным аргументом x и независимым аргументом x.

Теорема. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную $u'(x)$ в точке x, а функция $y = f(u)$ имеет производную $y'(u)$ в соответствующей точке $u = \varphi(x)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную $y'(x)$ в точке x которая находится по формуле $y'(x) = y'(u) \times u'(x)$.

5.4. Правило нахождения производной сложной функции:

Для нахождения производной сложной функции надо производную данной функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу.

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько.

Пример. Вычислить производную сложной функции:

1) $y = \ln\left(e^{4x} + \sqrt[3]{e^{2x}+1}\right)$.

Решение:

$$y=\ln\left(e^{4x}+\sqrt[3]{e^{2x}+1}\right)=\left|(\ln u)'=\frac{1}{u}(u)'\right|=\frac{1}{\left(e^{4x}+\sqrt[3]{e^{2x}+1}\right)}\left(e^{4x}+\sqrt[3]{e^{2x}+1}\right)'=$$

$$=\left|(u+v)'=u'+v';\ \left(e^{kx}\right)'=k\,e^{x};\ \left(\sqrt[n]{u^{m}}\right)'=\left(u^{\frac{n}{m}}\right)'=\frac{n}{m}u^{\frac{n}{m}-1}u'\right|=$$

$$=\frac{4e^{4x}+\frac{4e^{4x}}{3}\left(e^{4x}+1\right)^{-\frac{2}{3}}}{\left(e^{4x}+\sqrt[3]{e^{2x}+1}\right)}$$

2) $y=xarctg\left(2x+1\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^{2}\right)$;

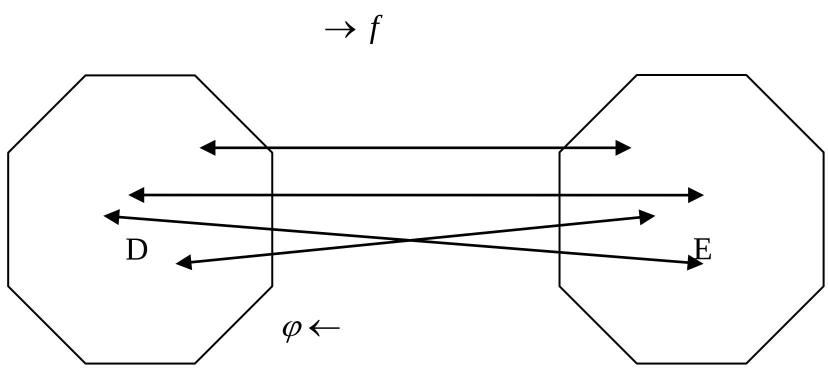
Решение :

$$y'=(x)'arctgx+x\left(arctg\left(2x+1\right)\right)'-\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+x^{2}}\left(1+x^{2}\right)'=$$

$$=1\times arctgx+\frac{x}{1+(2x+1)^{2}}\times\left(2x+1\right)'-\frac{2x}{2(1+x^{2})}=arctgx+\frac{x}{2x^{2}+2x+1}-\frac{x}{1+x^{2}}.$$

5.5. Обратная функция

Определение. Пусть задана функция $y=f(x)$ с областью определения D и множеством значений E. Если каждому значению $y\in E$ соответствует единственное значение $x\in D$, то определена функция $x=\varphi(y)$ с областью определения E и множеством значений D (рис1). Такая функция $x=\varphi(y)$ называется обратной к функции $y=f(x)$ и записывается в следующем виде: $x=\varphi(y)=f^{-1}(y)$. Про функции $x=\varphi(y)$ и $y=f(x)$ говорят, что они являются взаимно обратными.



(рис 1)

Примеры:

1) $y=\frac{3}{x}$ и $x=\frac{3}{y}$

2) $y=x+1$ и $x=y-1$

3) $y = 2x - 3$ и $x = \dfrac{y+3}{2}$

(Для того, чтобы для функции $y = f(x)$ найти обратную функцию надо переменную x выразить через переменную у).

Теорема. Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на интервале (a;b) и имеет не равную нулю производную $f'(x)$ в производной точке этого интервала, то обратная ей функция $x = \varphi(y)$ также имеет производную $\varphi'(y)$ в соответствующей точке, определяемую равенством $\varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

Пример:

1. Пользуясь правилом дифференцирования обратной функции, найти производную функции $y = \sqrt[3]{x-1}$.

Решение: Обратная функция $x = y^3 + 1$ имеет производную $x'_y = 3y^2$. Следовательно,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3 \times \sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

§6. Дифференциал функции

Определение. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, т.е. имеет в этой точке конечную производную $f'(x)$, то ее приращение Δy можно записать в виде $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x) \times \Delta x$, где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Главная, линейная относительно Δx часть $f'(x)\Delta x$ приращения функции называется дифференциалом функции и обозначается dy:

$dy = f'(x) \times \Delta x$. $\quad (dy = f'(x)dx)$

При достаточно малых Δx приращение функции приближенно равно ее дифференциалу т.е. $\Delta y \approx dy$.

Примеры:

1. Найти дифференциал функции у = $\cos x + 5x^2$.

Решение:

Используя формулу, $dy = f'(x)dx$ получаем dy = (-sinx+10x)dx.

2. Для функции $y = x^3 - x^2 + 1$ найти приращение Δy при $\Delta x = 0{,}01$ и $x = -1$.

Решение:
Используя формулу, $dy = f'(x)\times\Delta x$ получаем $dy = (x^3 - x^2 + 1)' \times \Delta x =$

$=(3x^2 - 2x)\times\Delta x$. Выполняя подстановку $\Delta x = 0{,}01$ и $x = -1$, находим приращение Δy:

$\Delta y = (3\times(-1)^2 - 2\times(-1))\times 0{,}01 = 0{,}05$

Ответ: $\Delta y = 0{,}05$

<u>Упражнения</u>

№1. Найти производные функций:

1. $y = x^4 + 3x^2 - 2x + 1$
2. $y = 7x^7 + 3x^2 - 4x - 1$
3. $y = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2} + 4$
4. $y = 3 + 4x^2 + \sqrt[5]{x^3} + \dfrac{1}{x^2} + \sin x + \cos x + \ln x$
5. $y = \sqrt[8]{x^3} - 4x^6 + 5\ln x - 7\cos x + tgx + ctgx$
6. $y = \log_2 x + 3\log_3 x$
7. $y = 4e^x + arctgx + \arcsin x$
8. $y = e^x - \dfrac{tgx}{2} + \dfrac{x^4}{4}$
9. $y = 5^x + 6^x + (\dfrac{1}{7})^x$
10. $y = \arcsin x + 3\sqrt[3]{x} + 5\arccos x$
11. $y = \dfrac{8}{\sqrt[4]{x}} - \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}$
12. $y = x\times\cos x$
13. $y = x^2 tgx$
14. $y = \sqrt[7]{x}\ln x$
15. $y = x\arccos x$
16. $y = \sqrt[3]{x}arcctgx$
17. $y = x^2\log_3 x$
18. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$
24. $y = \sqrt[4]{x^3} + \dfrac{5}{x^2} - \dfrac{3}{x^3} + 2$
25. $y = 4x^5 - 3\sin x + 5ctgx$
26. $y = 3\sqrt{x} + 4\cos x - 2tgx + 3$
27. $f(x) = \dfrac{x}{2x-1}$, *найти* $f'(0)$, $f'(x)$, $f'(-2)$
28. $f(x) = \dfrac{1-10^x}{1+10^x}$, *найти* $f'(0)$
29. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, *найти* $f'(e)$, $f'(1/e)$, $f'(e^2)$
30. $f(x) = x\ln x$, *найти* $f'(1)$, $f'(e)$, $f(1/e)$, $f'(1/e^2)$
31. $y = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$
32. $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + x$, *найти* $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(-1)$
33. $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{2x^2}$, *найти* $f'(2) - f'(-2)$

$19. y=\frac{\ln x}{\sin x}+xctgx$

$20. y=\frac{\cos x}{1+2\sin x}$

$21. y=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

$22. y=\frac{ctgx}{\sqrt{x}}$

$23. y=\frac{xtgx}{1+x^2}$

$34. f(x)=\frac{\sin x}{arctgx}+\ln x-8x^5$

$35. f(x)=\sqrt[6]{x}7^x-\sqrt{x}+56x$

$36. f(x)=\frac{5\sin x-6x}{\cos x-8}$

$37. f(x)=\left(x^6-\log_2 x\right)\frac{1}{x^3}$

$38. f(x)=\frac{x^3-3}{x^3+3}$

$39. f(x)=\arccos x+\frac{5}{\arccos x}$

$40. f(x)=2^x+x^6\left(\cos x+7\right)$

$41. f(x)=\sqrt[4]{x}\arcsin x-\frac{1}{4(x+8)}$

$42. f(X)=\sqrt[7]{x}+\sqrt[7]{x^6}-\cos x\sin x$

№2. Найти производные сложных функций:

$1. y=\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$

$2. y=\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\ln(\lg\frac{x}{2})$

$3. y=2^{3x}+x^5+e^{-x^2}+\frac{1}{x}$

$4. y=a^{\sin x}, 0<a\neq 1$

$5. y=\sqrt{x}\times e^{\sqrt{x}}$

$6. y=x^2\times e^{-x}$

$7. y=(x+2)e^{-x^2}$

$8. y=e^{\frac{x}{3}}\cos(\frac{x}{3})$

$9. y=e^{\frac{1}{\cos x}}$

$10. y=e^{1/\ln x}$

$11. y=10^{3-\sin^3 2x}$

$178. y=\sin(2^x)$

$19. y=\sin(x^2+5x+2)$

$20. y=\frac{1}{b}\cos(a-bx)$

$21. y=\sqrt{1-x^2}$

$22. y=\sqrt{1+5\cos x}$

$23. y=\sqrt{2x-\sin 2x}$

$24. y=\sin^2 x$

$25. y=\sin^3 x$

$26. y=\cos^{100} x$

$27. y=\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+3})$

$28. y=tg(x^2+3)$

$29. y=\ln\sin x$

$30. y=\ln\cos x$

$31. y=\ln tg5x$

$32. y=\ln(11+\cos x)$

$33. y=e^{tgx}$

$12. y=\frac{a}{2}(e^{x/a}+e^{-x/a})$

$13. y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

$14. y=\ln(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}+1})$

$15. y=\ln\sqrt{\frac{e^{4x}}{e^{4x}+1}}$

$16. y=\frac{\ln\sin x}{\ln\cos x}$

$17. y=\log_5\cos 7x$

$18. y=arctg\sqrt{6x-1}$

$34. y=\ln(x^2-3x+7)$

$35. y=\ln(x^2+2x)$

$36. y=\ln(x+\sqrt{x^2+5})$

$37. y=\ln\frac{x^2}{1-x^2}$

$38. y=\ln\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$

$39. y=x\ln x+\arcsin\sqrt{x}$

$40. y=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)$

$41. y=xarctg\sqrt{2x-1}-\frac{\sqrt{2x-1}}{2}$

$42. y=tg^3x-3tgx+3x$

№3. Найти дифференциалы функций:

$1. y=\sin\ x-7x$

$2. y=\ln x+\sin x$

$3. y=e^x\times x$

$4. y=2^x-5x^5$

$5. y=x\ln x$

$6. y=\arcsin x+\frac{4}{x^2}$

$7. y=x^3+x\sqrt{x}$

$8. y=arctgx+\frac{\sin x-7}{\cos x}$

$9. y=x^2\sin x$

$10. y=\frac{x+1}{\sqrt{x+1}}$

$11. y=\frac{\cos x}{1-\sin x}$

$12. y=xarctgx$

$13. y=\frac{x^2}{\arcsin x}$

$14. y=\sqrt{x}arctgx$

№3.

1. Для функции $y=2x^3-x^2+1$ найти приращение Δy при x=2 и Δ x=0,1.
2. Для функции $y=3x^2-4x\ \ +1$ найти приращение Δy при x=5 и $\Delta x=0{,}002$.
3. Для функции $y=-x^3+x^2+11x$ найти приращение Δy при x=2 и $\Delta x=0{,}004$.
3. Для функции $y=x^5-x^2+1$ найти приращение Δy при x=1 и $\Delta x=0{,}05$.
4. Для функции $y=4x^3+12x$ найти приращение Δy при x=3 и $\Delta x=0{,}001$.
5. Для функции $y=\frac{1}{3}x^3-0{,}5x^2+1$ найти приращение Δy при x=1 и $\Delta x=0{,}05$.
6. Для функции $y=\frac{1}{6}x^3-x$ найти приращение Δy при x=5 и $\Delta x=0{,}05$.
7. Для функции $y=x^3$ найти приращение Δy при x=1; $\Delta x=0{,}007$.

8. Для функции $y = 0{,}25x^4 - x^2 + 1$ найти приращение Δy при x=0,1 и $\Delta x = 0{,}01$.
9. Найти приближенно приращение Δy функции $y = x^2$, если x=2 и $\Delta x = 0{,}01$.

§7. Решение примеров на вычисление производных и дифференциалов высших порядков

7.1. Производные высших порядков

Производная $f'(x)$ называется производной первого порядка. Производная от $f'(x)$ называется производной второго порядка

(или второй производной) от функции $y = f(x)$, и обозначается y'' или $f''(x)$. Производная от $f''(x)$ называется производной третьего порядка (или третьей производной) от функции $y = f(x)$ и обозначается y''' или $f'''(x)$ и т.д.

Производная n-го порядка есть производная от производной (n-1)-го порядка, т.е. $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Производные, начиная со второй, называются производными высшего порядка.

7.2. Дифференциалы высших порядков

Дифференциал $dy = f'(x)dy$ называется дифференциалом первого порядка.

Дифференциал d(dy) от дифференциала dy называется дифференциалом второго порядка функции $y = f(x)$ и обозначается d^2y, т.е. $d^2y = f''(x)(dx)^2$.

Дифференциал $d(d^2y)$ от дифференциала d^2y называется дифференциалом третьего порядка функции $y = f(x)$ и обозначается d^3y и т.д.

Дифференциал $d(d^{n-1}y)$ от дифференциала d^{n-1} называется дифференциалом n – го порядка функции $y = f(x)$ и обозначается d^ny.

Упражнения

Найти производные второго порядка от функций:

1. $y = e^{-x^2}$
2. $y = tgx$
3. $y = ctgx$
4. $y = \arcsin\frac{x}{2}$
5. $y = \sin^2 x$
6. $y = \cos^2 x$
7. $y = \sqrt{1+x^2}$
8. $y = arctg\frac{1}{x}$
9. $y = \ln(2x-3)$
10. $y = x\sin x$
11. $y = x\arcsin x$
12. $y = \frac{x+1}{x-1}$

Найти производные третьего порядка от функций:

13. $y = arctg\frac{x}{2}$
14. $y = xe^{-x}$
15. $y = e^x \cos x$
16. $y = x^2 \sin x$
17. $y = x^3 2^x$
18. $y = x\ln x$

Найти производные n-го порядка от функций:

19. $y = \ln x$
20. $y = \sin 3x$
21. $y = e^{x/2}$
22. $y = 2^{3x}$
23. $y = \cos^2 x$
24. $y = \ln(1+x)$
25. $y = 3^x$
26. $y = x^2 \ln x$

Найти дифференциалы второго порядка от функций:

27. $y = 4x^5 - 7x^2 + 3$
28. $y = \cos 2x$
29. $y = 4^{-x^2}$
30. $y = \sqrt{\ln^2 x - 4}$

Найти дифференциалы, указанных порядков от функций:

31. $y = \sin^2 x, \textit{найти } d^3;$
32. $y = \sqrt{x-1}, \textit{найти } d^4y;$
33. $y = x\ln x, \textit{найти } d^5y;$
34. $y = x\sin x, \textit{найти } d^{10}y.$

§8. Исследование функции при помощи производных

8.1. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема Ролля. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале (a;b) и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a) = f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in$(a;b), в которой производная $f^{'}(x)$ обращается в нуль, т. е. $f^{'}(c) = 0$.

Теорема Коши. Если функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, дифференцируемы на интервале (a;b), причем $\varphi^{'}(x) \neq 0$ для $x \in$ (a;b) то найдется хотя бы одна точка $c \in$(a;b) такая, что выполняется равенство $\dfrac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

Теорема Лагранжа. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале (a;b) и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a) = f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in$(a;b) такая, что выполняется равенство $f(b) - f(a) = f^{'}(c)(b - a)$.

Следствие 1 Если производная некоторой функции на промежутке равна нулю, то функция постоянна на этом промежутке.

Следствие 2 Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

Возрастание и убывание функций

Теорема 1. (необходимые условия). Если дифференцируемая на интервале (a;b) функция $y = f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ для любого $x \in (a;b)$.

Теорема 2. (достаточные условия). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a;b) и $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ для любого $x \in (a;b)$, то эта функция возрастает (убывает) на интервале (a;b).

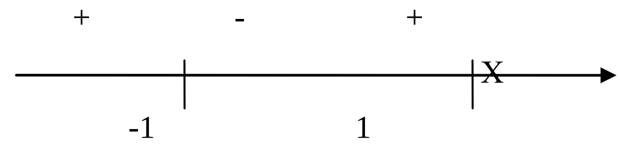
Теоремы 1 и 2 позволяют довольно просто исследовать функцию на монотонность (функция, убывающая или возрастающая, называется монотонной).

Пример. Исследовать функцию $f(x)$ =x^3-3x-4 на монотонность.

Решение:

$x \in R = (-\infty;+\infty)$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1) \times (x+1)$



$f'(x) \geq 0$ при $x \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$

$f'(x) \leq 0$ при $x \in [-1;1]$

Ответ: данная функция возрастает при $x \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$ и убывает $x \in [-1;1]$

8.2. Максимум и минимум функций

Теорема (необходимое условие). Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю: $f(x)$ =0.

Теорема (достаточное условие экстремума). Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой δ-окрестности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева на право) производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума, с минуса на плюс, то x_0 - точка минимума.

Удобно использовать другой достаточный признак существования экстремума основанный на определении знака второй производной.

Теорема. Если в точке x_0 первая производная функции $y = f(x)$ равна нулю $(f'(x) = 0)$, а вторая производная в точке x_0 существует и отличная от нуля $(f''(x) \neq 0)$, то при $f''(x_0) < 0$ в точке x_0 функция имеет максимум и минимум - при $f''(x_0) > 0$.

8.3. Выпуклость графика функции. Точки перегиба

Точка графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая его части разной выпуклости, называется точкой перегиба.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала (a;b) имеет отрицательную вторую производную, т.е. $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале выпуклый вверх.

Если же $f''(x) > 0$ для любого $x \in (a;b)$ - график выпуклый вниз.

Теорема (достаточное условие существования точек перегиба). Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0 в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

8.4. Асимптоты графика функции

Асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой.

Асимптоты бывают вертикальными, наклонными и горизонтальными.

Прямая x=a является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$.

Если существует наклонная асимптота y=kx+b, то k и b находится по формуле: $k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{y}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \infty} (y - kx)$.

Если k=0, то y=b- уравнение горизонтальной асимптоты.

8.5. Общая схема исследования функции и построения графика функции

Исследование функции целесообразно вести в определенной последовательности.

1. Найти область определения функции.
2. Найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат.
3. Найти интервалы знакопостоянства функции (промежутки, на которых $f(x)$>0 или $f(x)$<0).
4. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.
5. Найти асимптоты графика функции.
6. Найти интервалы монотонности функции.
7. Найти экстремумы функции.
8. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

Пример. Исследовать функцию $y=\frac{x}{1-x^2}$ и построить ее график.

1. $x\in(-\infty;-1),(-1;1),(1+\infty)$

2. $x=0, y(0)=0$

Точка (0;0)- точка пересечения графика с осями ОХ и ОУ.

3. Функция знакоположительна (y>0) в интервалах $(-\infty;-1)$ и $(0;1)$, знакоотрицательна – в $(-1;0)$ и $(1;+\infty)$

4. Функция $y=\frac{x}{1-x^2}$ является нечетной т.к. $y(-x)=\frac{-x}{1-(-x)^2}=-\frac{x}{1-x^2}=-y(x)$.

Следовательно, график ее симметричен относительно начала координат. Для построения графика достаточно исследовать ее при $x\geq 0$.

5. Прямые x = 1 и x = -1 являются ее вертикальными асимптотами.

Выясним наличие наклонной асимптоты.

$$R=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{1-x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2}=0$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(\frac{x}{1-x^2}-0\times x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1-x^2}=0$$

Следовательно, есть горизонтальная асимптота ее уравнение y=0. Наклонных асимптот нет.

Прямая y=0 является асимптотой и при $x\to+\infty$, и при $x\to-\infty$.

6. $y'=(\frac{x}{1-x^2})'=\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}$.

Так как y’>0 в области определения, то функции является возрастающей на каждом интервале области определения.

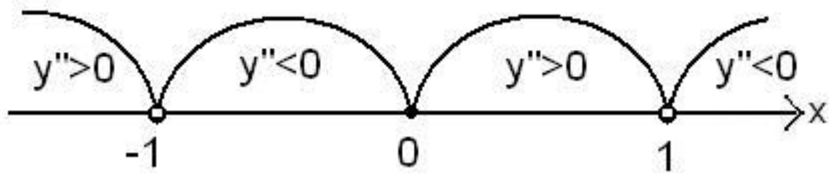
7. Т.к. $y'=\frac{x^2+1}{(1+x^2)^2}$, то критическими точками является точки

x_1 = -1 и x_2 = 1.

Данные точки не принадлежат области определения функции, значит, функция экстремумов не имеет.

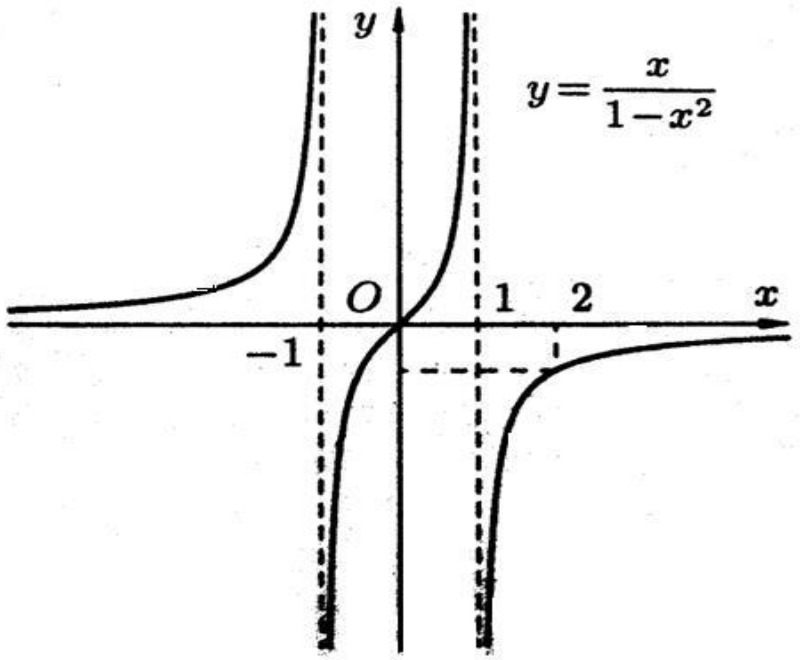
8. Найдем y”

$$y'' = \left(\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}\right)' = \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$$



Точка (0;0) – точка перегиба графика функции.

График выпуклый вверх на интервалах $(-1;0)$ и $(1;+\infty)$; выпуклый вниз на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(0;1)$



<u>Упражнения</u>

Построить график функции:

1).$y = x^3 - 3x$

2).$y = \dfrac{x^3}{3} + x^2$

3).$y = x + 2\sqrt{-x}$

4).$y = \dfrac{6\sqrt{x}}{x+2}$

5).$y = \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1}$

6).$y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$

7).$y = 12x - x^3$

8).$y = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2$

9).$y = 3x - x^2$

10).$y = x\sqrt{-x+1}$

11).$y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}$

12).$y = -\sqrt{2x-1}$

13).$y = \sqrt[3]{8x-1} + 1$

14).$y = 2 - \dfrac{3}{x+1}$

15).$y = \dfrac{x+5}{x+3}$

16).$y = x(x-1)^{\frac{2}{3}}$

17).$y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

18).$y = \dfrac{(x-2)^3}{(x-2)^2 - 4}$

19).$y = \dfrac{(x+3)^3}{(x+3)^2 - 9}$

20).$y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$

23).$y = \dfrac{1}{x^3}$

24).$y = x^2 + \dfrac{1}{x}$

Раздел II. Решение примеров на вычисление неопределенных интегралов

§9. Неопределенный интеграл

9.1. Основные свойства неопределенного интеграла

$1^0\ (\int f(x)dx)' = f(x)$;

$2^0\ d\int f(x)dx = f(x)dx$;

$3^0 \int dx(x) = F(x) + c$;

$4^0 \int kf(x)dx = k\int (x)dx$;

$5^0 \int [f(x) \pm g(x)] = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

9.2. Таблица основных интегралов

$$1.\int u^{\alpha}du=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c,(\alpha\neq-1),\text{ в частности, }\int du=u+c;$$

$$2.\int\frac{du}{u}=\ln|u|+c;\ 3.\int a^{u}du=\frac{a^{u}}{\ln a}+c;\ 4.\int e^{u}du=e^{u}+c;\ 5.\int\sin udu=-\cos u+c;$$

$$6.\int\cos udu=\sin u+c;\ 7.\int tgudu=-\ln|\cos u|+c;\ 8.\int ctgudu=\ln|\sin u|+c;$$

$$9.\int\frac{du}{\cos^{2}u}=tgu+c;\ 10.\int\frac{du}{\sin^{2}u}=-ctgu+c;\ 11.\int\frac{du}{\sin u}=\ln\left|tg\frac{u}{2}\right|+c;$$

$$12.\int\frac{du}{\cos u}=\ln\left|tg(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4})\right|+c;\qquad 13.\int\frac{du}{\sqrt{a^{2}-u^{2}}}=\arcsin\frac{u}{a}+c;$$

$$14.\int\frac{du}{\sqrt{u^{2}+a^{2}}}=\ln\left|u+\sqrt{u^{2}+a^{2}}\right|+c;\qquad 15.\int\frac{du}{a^{2}+u^{2}}=\frac{1}{a}arctg\frac{u}{a}+c;$$

$$16.\int\frac{du}{a^{2}-u^{2}}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|+c;\qquad 17\int\sqrt{a^{2}-u^{2}}du=\frac{u}{2}\sqrt{a^{2}-u^{2}}+\frac{a^{2}}{2}\arcsin\frac{u}{a}+c;$$

$$18.\int\sqrt{u^{2}\pm a^{2}}du=\frac{u}{2}\times\sqrt{u^{2}\pm a^{2}}\pm\frac{a^{2}}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^{2}\pm a^{2}}\right|+c.$$

§10. Основные методы интегрирования

10.1. Метод непосредственного интегрирования

Определение. Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интегрирования приводится к одному или нескольким табличным интегралом, называется непосредственном интегрированием.

Примеры:

1) $$\int\frac{d(x)}{x+3}=\int\frac{d(x+3)}{x+3}=\ln|x+3|+c$$

2) $$\int\left(4x^{3}-\frac{5}{\cos^{2}2x}+3^{1-x}\right)d(x)=4\int x^{3}dx-\frac{5}{2}\int\frac{d(2x)}{\cos^{2}2x}-\int 3^{1-x}d(1-x)=$$
$$x^{4}-\frac{5}{2}tgx-\frac{3^{1-x}}{\ln 3}+c$$

10.2. Метод интегрирования подстановкой

Метод подстановки (или замены переменной) заключается в том, что заменяют x на $\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируемая функция, полагают $dx=\varphi'(t)$ и получают

$$\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \end{vmatrix} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt .$$

Примеры:

1) $\int \cos 3x dx = \begin{vmatrix} 3x=t & 3dx=dt \\ (3x)'dx=dt & ; dx=\frac{1}{3}dt \end{vmatrix} = \int \cos t \times \frac{1}{3}dt + c = \frac{1}{3}\sin 3x + c$

2) $\int \sin(7x+8)dx = \begin{vmatrix} 7x+8=t & dx=\frac{1}{7}dt \\ 7dx=dt & ; \end{vmatrix} = \int \sin t \times \frac{1}{7}dt \Big| = -\frac{1}{7}\cos t + c = -\frac{1}{7}\cos(7x+8)+c$

3) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{vmatrix} 1-x^2=t & dx=-\frac{dt}{2x}dt \\ -2xdx=dt & ; \end{vmatrix} = -\int \frac{\cancel{x}dt}{\sqrt{t}\times 2\cancel{x}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = -\frac{1}{2}\times\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+c=$

$=-\frac{1}{2}\times 2\times t^{\frac{1}{2}}+c=-\sqrt{1-x^2}+c$

4) $\int (15-3x)^7 dx = \begin{vmatrix} 15-3x=t & dx=-\frac{1}{3}dt \\ -3dx=dt & ; \end{vmatrix} = \int t^7 \times(-\frac{1}{3})dt = -\frac{1}{3}\times\frac{t^8}{8}+c=-\frac{(15-3x)^8}{24}+c$

10.3. Метод интегрирования по частям

$$\int u d\upsilon = u\times\upsilon - \int \upsilon du$$

Вид интеграла	Подстановка
$\int P(x)arctgxdx; \int P(x)arcctgxdx; \int P(x)\ln xdx;$ $\int P(x)\arcsin xdx; \int P(x)\arccos xdx; P(x)$ - многочлен.	$u=arctgx$ $u=arcctgx$ $u=\ln x$ $u=\arcsin x$ $u=\arccos x$ $d\upsilon=P(x)dx$ $\upsilon=[первообразная P(x)]$

$\int P(x)e^{kx};\int P(x)\sin kxdx;\int P(x)\cos kxdx,$ $k - некоторое\ \ число$ P(x) – многочлен.	$u = P(x)$ $d\upsilon = e^{kx}dx$ $\upsilon = [первообразная E^{kx}]$ $d\upsilon = \sin kxdx$ $\upsilon = [первообразная \cos kx]$
$\int e^{ax}\cos bxdx;\int e^{ax}\sin bxdx$ a и b некоторые числа.	Двукратное интегрирование Например: $\int e^x\cos xdx = \left\vert\begin{matrix} u = e^x & dx = \cos xdx \\ du = e^x dx & ; \upsilon = \sin x \end{matrix}\right\vert =$ $= e^x\sin x - \int e^x\sin xdx = \left\vert\begin{matrix} u = e^x & d\upsilon = \sin xdx \\ du = e^x dx & ; \upsilon = -\cos x \end{matrix}\right\vert =$ $= e^x\sin x - (-e^x\cos + \int e^x\cos xdx)$. $\int e^x\cos xdx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + c$.

Примеры:

1) $\int \ln xdx = \left\vert\begin{matrix} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{matrix}\right\vert = x\times\ln x - \int x\times\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + c$

2) $\int(2x+1)e^{3x}d(x) = \left\vert\begin{matrix} u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{matrix}\right\vert =$

$= (2x+1)\times\frac{1}{3}e^{3x} - \int\frac{1}{3}e^{3x}2xdx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + c$

Упражнения

№1. Применяя метод непосредственного интегрирования, вычислить интегралы:

1. $\int (x^2 + 3x^3 + x + 1)dx$

2. $\int (x^4 + \sqrt[5]{x} + 3\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x})dx$

3. $\int (\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}})dx$

4. $\int (2^x + 3^x)dx$

5. $\int e^x (2 - \frac{e^{-x}}{x^3})dx$

6. $\int (\sin x + 5\cos x)dx$

7. $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$

8. $\int \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$

9. $\int (\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{x^2+3})dx$

11. $\int \frac{x^2+2}{x^2-1} dx$

12. $\int (\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3})dx$

13. $\int (\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}})dx$

14. $\int 4^x (3 + \frac{4^{-x}}{\sqrt{x^3}})dx$

15. $\int e^x (1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x})dx$

16. $\int \frac{5x^8 + 1}{x^4} dx$

17. $\int \frac{(\sqrt{x} - 1)^3}{x} dx$

18. $\int (\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2})^2 dx$

19. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \times \sin^2 x} dx$

20. $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$

21. $\int \frac{3 - 2ctg^2 x}{\cos^2 x} dx$

22. $\int \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x} dx$

23. $\int ctg^2 x dx$

24. $\int \frac{3tg^2 x + 4}{\sin^2 x} dx$

25. $\int (\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2})^2 dx$

26. $\int 2^x e^x dx$

27. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$

28. $\int \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx$

29. $\int \frac{x^5 - x + 1}{x^2 + 1} dx$

30. $\int \frac{-2x^4 + 4x^2 - 1}{1 - x^2} dx$

31. $\int \frac{-3x^4 + 3x^2 - 1}{x^2 - 1} dx$

32. $\int \frac{2^x + 5^x}{10^x} dx$

33. $\int \frac{dx}{16 - x^2}$

№2. Пользуясь методом подстановки вычислить интегралы:

1. $\int \cos 5x dx$
2. $\int \sin 7x dx$
3. $\int \sin(3x+5) dx$
4. $\int e^{2x} dx$
5. $\int tgx dx$
6. $\int e^{-x^2} x dx$
7. $\int \frac{e^{4x}}{e^x - 1} dx$
8. $\int \frac{x^4}{x^5 + 7} dx$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$
10. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} dx$
11. $\int \frac{5x - 6}{\sqrt{1 - 3x}} dx$
12. $\int \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} - 1} dx$
13. $\int \frac{\sin x}{1 + 3\cos x} dx$
14. $\int \frac{\cos 3x}{3 + \sin 3x} dx$
15. $\int \cos^3 x \sin x dx$
16. $\int \sin^2 x \cos x dx$
17. $\int e^{\cos x} \sin x dx$
18. $\int e^{-x^3} x^2 dx; \left(t = e^{-x^3}\right)$
19. $\int e^{\sin x} \cos x dx$
20. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$
21. $\int \frac{e^{arctgx}}{1 + x^2} dx$
22. $\int e^{-tgx} \sec^2 x dx$
23. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{3}}$
24. $\int (2 + 5x)^9 dx$
25. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x}}$
26. $\int \sqrt{2x - 5} dx$
27. $\int \sqrt[3]{3 - 7x} dx$
28. $\int \frac{dx}{5x + 2}$
29. $\int \frac{dx}{2 - 3x}$
30. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + 1} dx$
31. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
32. $\int \frac{dx}{(\arccos x)\sqrt[5]{1 - x^2}}$
33. $\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$
34. $\int \frac{1 - 2\sin x}{\cos^2 x} dx$
35. $\int \frac{1 + \sin 2x}{\sin^2 x} dx$
36. $\int \sqrt{3 + \cos 5x} \sin 5x dx$
37. $\int \frac{\cos 3x}{\sqrt[7]{3 + 5\sin 3x}} dx$
38. $\int \frac{arctg^2 x}{1 + x^2} dx$
39. $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$
40. $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$
41. $\int 4^{1-3x} dx$

42. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}$

43. $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$

44. $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}; (t = 1+\ln x)$

45. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$

46. $\int \frac{3^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx; \left(t = \frac{1}{x}\right)$

47. $\int \frac{(arctgx)^{100}}{1+x^2} dx; (t = arctgx)$

48. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$

49. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} dx$

50. $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

51. $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$

52. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x^2}}$

53. $\int \frac{dx}{9x^2-1}$

54. $\int \frac{dx}{3-5x^2}$

55. $\int \frac{dx}{4x^2+5}$

56. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-4x^2}}$

№3. С помощью метода интегрирования по частям вычислить интегралы:

1. $\int xarctgxdx$

2. $\int \arcsin xdx$

3. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$

4. $\int arctg\sqrt{7x-1}dx$

5. $\int x\ln xdx$

6. $\int x\ln(3x+2)dx$

7. $\int (x^2+3x+2)\ln xdx$

8. $\int (4x^3+6x-7)\ln xdx$

9. $\int \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})dx$

10. $\int \frac{arctgx}{x^2} dx$

11. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

12. $\int \ln xdx$

13. $\int xe^{-x} dx$

14. $\int xe^{5x} dx$

15. $\int x^3e^{-x} dx$

16. $\int x^2e^{-\frac{x}{2}} dx$

17. $\int x\cos xdx$

18. $\int x\sin xdx$

19. $\int (x+1)\cos 3xdx$

20. $\int x^2\cos xdx$

21. $\int x^2\sin xdx$

22. $\int x^2e^x dx$

23. $\int e^x\sin\frac{x}{2}dx$

24. $\int (x^3+1)\cos xdx$

25. $\int \ln^2 xdx$

26. $\int \ln(x^2+2)dx$

27. $\int \cos(\ln x)dx$

Раздел III. Решение примеров на вычисление определенных интегралов

§11. Определенный интеграл

Определение. Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке [a;b], a<b. Разобьем этот отрезок на n произвольных частей точками $a=x_0<x_1<x_2<x_3<..........<x_{i-1}<.......<x_n=b$

В каждом из полученных частичных отрезков $[x_{i-1},x_i]$ выберем произвольную точку Ci $(x_{i-1}\le Ci\le x_i)$ и составим сумму

$$S_n=f(C_1)\times\Delta x_1+f(C_2)\times\Delta x_2+f(C_3)\times\Delta x_3+.......+f(C_n)\times\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}f(Ci)\times\Delta x_i \quad (*)$$

где $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. Сумма вида (*) называется **интегральной суммой** для функции $f(x)$ на отрезке [a;b].

Обозначим через α длину наибольшего частичного отрезка разбиения: $\alpha=\max\{\Delta x_i\}$ $1\le i\le n$

Определение. Если существует конечный предел интегральной суммы S_n, когда $n\to\infty$так, что $\alpha\to 0$, то этот предел называют определенным интегралом от функции $y=f(x)$ на отрезке [a;b] и обозначают следующим образом: $\int_a^b f(x)dx$ или $\int_a^b f(x)dx=\lim_{\alpha\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(x)\Delta x_i$. В этом случае функция $y=f(x)$ называется интегрируемой на отрезке [a;b] . Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, $f(x)$ – подынтегральной функцией, x – переменной интегрирования.

Отметим, что непрерывность функции является достаточным условием ее интегрируемости.

11.1. Основные свойства определенного интеграла

$1^0 \int_a^b f(x)dx = 0$; $2^0 \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

$3^0 \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$; где a, b, c любые числа.

$4^0 \int_a^u kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$; $5^0 \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

11.2. Формула Ньютона – Лейбница

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке [a;b] и функция y = F(x) является некоторой ее первообразной на этом отрезке, то имеет место формула Ньютона – Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

§12. Вычисление определенных интегралов

Простым и удобным методом вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции является формула Ньютона-Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

При вычислении определенных интегралов широко используется метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

12.1. Интегрирование подстановкой

Пусть для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции сделана подстановка $x = \varphi$(t)

Теорема. Если:

1) функция $x = \varphi(t)$ и её производная $x' = \varphi'(t)$ непрерывны при $t \in [d;\beta]$;

2) множеством значений функции $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha;\beta]$ является отрезок [a;b];

3) $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$ **то** $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$

12.2. Интегрирование по частям

Теорема. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке [a;b], то имеет место формула $\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du$.

Пример.

Вычислить $\int\limits_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}\,dx$.

Решение:

$$\int\limits_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}\,dx = \begin{vmatrix} u = e^x & dx = \sin\frac{x}{2}\,dx \\ du = e^x dx & x = -2\cos\frac{x}{2} \end{vmatrix} = -2\cos\frac{x}{2}\,e^x \Big|_0^{\pi} + 2\int\limits_0^{\pi} e^x \cos\frac{x}{2}dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = e^x & dx = \cos\frac{x}{2}\,dx \\ du = e^x dx & x = 2\sin\frac{x}{2} \end{vmatrix} = -2\cos\frac{\pi}{2}\,e^{\pi} + 2\cos\frac{0}{2}\,e^0 + 2\left(2e^x \sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}\,dx\right) =$$

$$= 2 + 4e^{\pi}\sin\frac{\pi}{2} - 4e^0 \sin\frac{0}{2} - \int\limits_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}dx = 2 + 4e^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}\,dx$$

$$\int\limits_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}\,dx = 1 + 2e^{\pi}$$

Ответ: $\int\limits_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}\,dx = 1 + 2e^{\pi}$

Упражнения

Вычислить интегралы:

1. $\int\limits_a^b x^n dx (n \neq 1)$
2. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$
3. $\int\limits_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx$
4. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$
5. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$
6. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{3x^4+3x^2+1}{1+x^2} dx$
7. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$
8. $\int\limits_0^\pi \sin 2x dx$
9. $\int\limits_1^e \ln x dx$
10. $\int\limits_1^e \ln^2 x dx$
11. $\int\limits_{-1}^1 x e^{-x^2} dx$
12. $\int\limits_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$
13. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$
14. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$
15. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$
16. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$
17. $\int\limits_0^2 \left(3x^2 - 1\right) dx$
18. $\int\limits_1^2 e^x dx$
19. $\int\limits_0^\pi \sin x dx$
20. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$
21. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{1+x^2} dx$
22. $\int\limits_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right) dx$
23. $\int\limits_0^2 x(3-x) dx$
24. $\int\limits_{2\pi}^{3\pi} x \sin x dx$
25. $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$
26. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} arctgx dx$
27. $\int\limits_{-1}^1 x^2 e^{-x} dx$
28. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$
29. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx$
30. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$
31. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x dx$
32. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

33. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

34. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^3 x dx$

35. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$

36. $\int_1^3 \frac{dx}{x+x^2}$

Дополнительно:

<u>Задачи по теме:</u> «Приложения определенного интеграла»

1. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной функциями: x-2y+4=0, x+y-5=0, y=0.
2. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной функцией $x^2+y^2=r^2$.
3. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной функциями: $7x^2-9y+9=0$, $5x^2-9y+27=0$.
4. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной функциями: x-y+2=0, y=0, x=-1, x=2.
5. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной функциями:

   2x-3y+6=0, y=0, x=3.
6. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной функциями: $y=2x^2+1$, $y=x^2+10$.
7. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной функциями: $y=-1.5x^2+9x-7.5$, $y=-x^2+6x-5$.
8. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v=(6t^2+2t)$ м/с, второе – со скоростью v=(4t+5) м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5с?
9. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v=(3t^2-6t)$ м/с, второе – со скоростью v=(10t+20) м/с. В какой момент и на каком расстоянии от начальной точки произойдет их встреча?.
10. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v=3t^2$ м/с, второе – со скоростью $v=(6t^2+10)$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 10с?
11. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v=(3t^2+4t)$ м/с, второе – со скоростью v=(6t+12) м/с. В какой момент и на каком расстоянии от начальной точки произойдет их встреча?.
12. При сжатии пружины на 0,05 м затрачивается работа 25 Дж. Какую работу необходимо совершить, чтобы сжать пружину на 0,1 м?
13. Для растяжения пружины на 0,04 м необходимо совершить работу 20 Дж. На какую длину можно растянуть пружину, совершив работу 80 Дж?

14. Цилиндр с подвижным поршнем, площадь поперечного сечения которого S кв.ед., заполнен газом. Считая, что при увеличении объема газа в цилиндре соблюдается закон Бойля-Мариотта $pV=k=const$, вычислить работу, произведенную силой давления газа при увеличении его объема от V_0 до V_1 (температура газа поддерживается постоянной).
15. Пружина растягивается на 0,02 м под действием силы 60Н. Какую работу производит эта сила, растягивая пружину на 0,12 м?
16. В цилиндрическом сосуде объема $V_0=0{,}2$ м^3 заключен атмосферный воздух при нормальном давлении $P_0=1014325$Н/м^2. Воздух сжимается поршнем до объема 0,05 м^3. Какая работа производится при этом, если температура воздуха поддерживается постоянной?
17. Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,1 м. Сила в 20Н растягивает её на 0,01м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть её от 0,12 до 0,14 м?
18. Цилиндрическая цистерна с радиусом основания 0,5 м и высотой 2 м заполнена водой. Вычислить работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из цистерны.
19. Вычислить работу, которую надо произвести, чтобы выкачать из резервуара конической формы с вершиной, обращенной книзу. Резервуар наполнен доверху водой. Радиус основания конуса R=1м, высота конуса 2м.
20. Прямоугольный резервуар, основанием которого служит квадрат со стороной 3м, а высота равна 2м, заполнен водой. Вычислите работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из резервуара.
21. Цилиндрический резервуар с радиусом основания 2 м и высотой 3м заполнен водой. Вычислите работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из резервуара.
22. Вычислить силу давления воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 20м и высотой 5м (уровень воды совпадает с верхним обрезом шлюза).
23. Вычислить силу давления воды на вертикальную плотину, имеющую форму равнобедренной трапеции с основаниями a и b $(a > b)$ и высотой h.
24. Треугольная пластина с основанием 0,2 м и высотой 0,4 м погружена вертикально в воду так, что вершина лежит на поверхности воды, а основание параллельно ей. Вычислите силу давления воды на пластину.
25. Найти длину дуги параболы $y=\frac{x^2}{2}$ между точками O (0;0) и A($\sqrt{3}$;3/2).
26. Найти длину дуги параболы$y=4-x^2$ между точками её пересечения с осью Ox.

27. Найти длину дуги параболы y^2=x между точками O (0;0) и A($\frac{3}{4}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$).
28. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$, $y^2 = 8x$.
29. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями y^2=x, y=x^2.
30. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями y^2=8x, y=x^2.
31. Найти работу, необходимую для выкачивания воды из бассейна, имеющего форму полуцилиндра, длина которого a=25 м, а радиус R=20 м.

Вычислите работу, необходимую для выкачивания воды из полусферического сосуда, диаметр которого 20 м.

Раздел IV. Комплексные числа

В связи с развитием алгебры потребовалось ввести сверх прежде известных положительных и отрицательных чисел числа нового рода. Они называются комплексными.

Комплексное число имеет вид a + bi; здесь a и b – действительные числа, а i – число нового рода, называемое мнимой единицей. «Мнимые» числа составляют частный вид комплексных чисел (когда a = 0). С другой стороны, и действительные (т.е. положительные и отрицательные числа являются частным видом комплексных чисел (когда b = 0).

Действительное число a назовем абсциссой комплексного числа a + bi; действительное число b – ординатой комплексного числа a + bi; Основное свойство числа i состоит в том, что произведение i · i равно –1, т.е. $i^2 = -1$ (1) .

Долгое время не удавалось найти такие физические величины, над которыми можно выполнять действия, подчинённые тем же правилам, что и действия над комплексными числами – в частности правилу (1). Отсюда названия: «мнимая единица», «мнимое число» и т.п. В настоящее время, известен целый ряд таких физических величин, и комплексные числа широко применяются не только в математике на также в физике и технике (теория упругости, электротехника, аэродинамика и др.).

Ниже дано геометрическое истолкование комплексных чисел. Предварительно устанавливаются правила действий над ними; при этом оставляется в стороне вопрос о геометрическом или физическом смысле числа i, потому что в разных областях науки этот смысл различен.

Правило каждого действия над комплексными числами выводится из определения этого действия. Но определения действий над комплексными числами не вымышлены произвольно, а установлены с таким расчетом, чтобы они согласовывались с правилами действий над вещественными числами. Ведь комплексные числа должны рассматриваться не в отрыве от действительных, а совместно с ними.

13.1. Основные соглашения о комплексных числах

1. Действительное число a записывается также в виде a + 0·i (или a – 0·i)

Примеры. Запись 3 + 0·i обозначает то же, что запись 3. Запись –2 + 0·i означает –2. Запись $\frac{3\sqrt{2}}{2} + 0 \cdot i$ означает $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Замечание. Аналогично мы поступаем и в обычной арифметике: запись $\frac{5}{1}$ обозначает то же, что запись 5. Запись 002 – то же, что 2, и т. п.

2. Комплексное число вида 0 + bi называется «чисто мнимым». Запись bi обозначает то же, что 0 + bi .

3. Два комплексных числа a + bi, a' + b'i считаются равными, если у них соответственно равны абсциссы и ординаты, т. е. если a = a', b = b'. В противном случае комплексные числа не равны. Это определение подсказываете следующим соображением. Если бы могло существовать скажем, такое равенство: 2 + 5i = 8 + 2i, то по правилам алгебры мы имели бы i = 2, тогда как i не должно быть действительным числом.

Замечание. Мы еще не определили, что такое сложение комплексных чисел. Поэтому, строго говоря еще не вправе утверждать, что число 2 + 5i есть сумма чисел 2 и 5i. Точнее было бы сказать, что у нас есть пара действительных чисел: 2 (абсцисса) и 5 (ордината); эти числа порождают число нового рода, условно обозначаемое 2 + 5i.

13.2. Сложение комплексных чисел

Определение. Суммой комплексных чисел a + bi и , a' + b'i называют комплексное число (a + a') + (b + b')·i.

Это определение подсказывается правилами действий с обычными многочленами.

Пример 1. (–3 + 5i) + (4 – 3i) = 1 – 3i

Пример 2. (2 + 0i) + (7 + 0i) = 9 + 0i. Так как запись 2 + 0i означает то же что и 2 и т. д., то выполненное действие согласуется с обычной арифметикой (2 + 7 = 9).

Пример 3. (0 + 2i) + (0 + 5i) = 0 + 7i, т.е. 2i+ 5i = 7i.

Пример 4. $(–2 + 3i) + (–2 – 3i) = –4$.

В примере 4 сумма двух комплексных чисел равна действительному числу. Два комплексных числа $a + bi$ и $a' – b'i$ называются сопряженными. Сумма сопряженных комплексных чисел равна действительному числу $2a$.

Замечание. Теперь, когда действие сложения определено, мы имеем право рассматривать комплексное число $a + bi$ как сумму чисел a и bi. Так как число 2 (которое мы условно записываем $2 + 0i$) и число $5i$ (которое означает то же число , что и $0 + 5i$) в сумме дают $2 + 5i$.

13.3. Вычитание комплексных чисел

Определение. Разностью комплексных чисел $a + bi$ (уменьшаемое) и $a' – b'i$ (вычитаемое) называется комплексное число $(a – a') + (b – b')\cdot i$.

Пример 1. $(–5 + 2i) – (3 – 5i) = –8 + 7i$

Пример 2. $(3 + 2i) – (–3 + 2i) = 6 + 0i=6$.

Пример 3. $(3 – 4i) – (3 + 4i) = –8i$.

Замечание. Вычитание комплексных чисел можно определить так же, как действие обратное сложению. Именно мы ищем такое комплексное число $x + yi$ (разность), чтобы $(x + yi) + (a' + b'i) = a + bi$. Согласно определению имеем:

$(x + a') + (y + b')\cdot i = a + bi$.

Согласно условию равенства комплексных чисел

$x + a' = a, \quad y + b' = b$

Из этих уравнений находим $x = a – a', \quad y = b – b'$.

13.4. Умножение комплексных чисел

Определение умножения комплексных чисел устанавливается с таким расчетом, чтобы 1) числа $a + bi$ и $a' + b'i$ можно было перемножать, как алгебраические двучлены, и чтобы 2) число i обладало свойством $i^2= – 1$. В силу требования 1) произведение $(a + bi)\cdot(a' + b'i)$ должно равняться $aa' + (ab' + ba') i + bb' i^2$, а в силу требования 2) это выражение должно равняться $(aa' - bb') + (ab' + ba') i$. В соответствии с этим устанавливается следующее определение.

Определение. Произведением комплексных чисел $a + bi$ и $a' + b'i$ называется комплексное число

$$(aa' - bb') + (ab' + ba') i$$

Замечание 1. Равенство $i^2 = -1$ до установленного правила умножения комплексных чисел носило характер требования. Теперь оно вытекает из определения. Ведь запись i^2, т. е. $i \cdot i$, равнозначна записи $(0 + 1 \cdot i)(0 + 1 \cdot i)$. Здесь $a = 0$, $b = 1$, $a' = 0$, $b' = 1$ Имеем $aa' - bb' = -1$, $ab' - ba' = 0$, так что произведение есть $-1 + 0 \cdot i$, т. е. -1.

Замечание 2. На практике нет нужды пользоваться формулой произведения. Можно перемножить данные числа, как двучлены, а затем положить, что $i^2 = -1$.

Пример 1. $(1 - 2i) \cdot (3 + 2i) = 3 - 6i + 2i + 4 = 7 - 4i$.

Пример 2. $(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$.

Пример 2 показывает, что произведение сопряженных комплексных чисел есть действительное и притом положительное число.

13.5. Деление комплексных чисел

В соответствии с определением деления действительных чисел устанавливается следующее определение.

Определение. Разделить комплексное число $a + bi$ (делимое) на комплексное число $a' + b'i$ (делитель) – значит найти такое число $x + yi$ (частное), которое, будучи помножено на делитель, даст делимое.

Если делитель не равен нулю, то деление всегда возможно, и частное единственно (доказательство смотри в замечании 2). На практике частное удобнее всего находить следующим образом.

Пример 1. Найти частное $(7 - 4i) : (3 + 2i)$

Записав дробь $(7 - 4i)/(3 + 2i)$ расширяем её на число $(3 - 2i)$, сопряженное с $(3 + 2i)$. Получим:

$$\frac{(7-4i)\cdot(3-2i)}{(3+2i)\cdot(3-2i)} = \frac{13-26i}{13} = 1 - 2i$$

Пример 2.

$$\frac{-2+5i}{-3-4i} = \frac{(-2+5i)(-3+4i)}{(-3-4i)(-3+4i)} = \frac{-14-23i}{25} = -0{,}56 - 0{,}92i.$$

Введение комплексных чисел позволяет разработать полную теорию квадратных уравнений. В поле комплексных чисел разрешимо любое квадратное уравнение.

Примеры.

1. Решите уравнение $x^2 – 2x – 8 = 0$.

Решение. Найдем дискриминант $D = b^2 – 4ac = (– 2)^2 – 4 \cdot 1 \cdot (– 8) = 36 > 0$.

Уравнение имеет два действительных корня:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{2+\sqrt{36}}{2} = 4;$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{2-\sqrt{36}}{2} = -2.$$

2. Решите уравнение $x^2 + 6x + 9 = 0$.

Решение. $D = 6^2 – 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$, уравнение имеет два равных действительных корня:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2} = 3.$$

3. Решите уравнение $x^2 – 4x + 5 = 0$.

Решение. $D = 16 – 4 \cdot 1 \cdot 5 = – 4 < 0$, уравнение имеет мнимые корни:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2};$$

$$x_1 = \frac{4+2i}{2} = 2 + i; \quad x_2 = \frac{4-2i}{2} = 2 - i.$$

Упражнения:

№ 1. Произведите сложение и вычитание комплексных чисел:

1) (3 + 2i) – (–3 + 2i)
2) (3 – 4i) – (3 + 4i)
3) (3 + 5i) + (7 – 2i)
4) (6 + 2i) + (5 + 3i)
5) (– 2 + 3i) + (7 – 2i)
6) (5 – 4i) + (6 + 2i)
7) (3 – 2i) + (5 + i)
8) (4 + 2i) + (– 3 + 2i)
9) (– 5 + 2i) + (5 + 2i)
10) (– 3 – 5i) + (7 – 2i)

№ 2 Произведите умножение комплексных чисел:

1) (2 + 3i)(5 – 7i)
2) (6 + 4i)(5 + 2i)
3) (3 – 2i)(7 – i)
4) (– 2 + 3i)(3 + 5i)
5) (1 –i)(1 + i)
6) (6 + 4i)3i
7) (2 – 3i)(– 5i)
8) (5 + 3i)(5 – 3i)
9) (m – ni)(m + ni)
10) (2 + 5i)(2 – 5i)
11) (1 + i)(1 – i)
12) (3 + 2i)(3 – 2i)
13) (5 + i)(5 – i)
14) (1 – 3i)(1 + 3i)
15) (7 – 6i)(7 + 6i)
16) (a + bi)(a – bi)
17) (2 + 3i) 7i
18) (3 + 2i)(1 + i)

№ 3 Выполнить деление:

1) $\frac{(-2i)}{5-i}$
2) $\frac{5i}{3+2i}$
3) $\frac{3-i}{5-3i}$
4) $\frac{3+2i}{5i}$
5) $\frac{5-7i}{5+7i}$
6) $\frac{5i}{3+2i}$
7) $\frac{2-3i}{5+3i}$
8) $\frac{3+2i}{1-5i}$
9) $\frac{6-7i}{i}$
10) $\frac{1+i}{1-i}$
11) $\frac{3-7i}{2-3i}$
12) $\frac{4-i}{5-3i}$
13) $\frac{3i}{4-3i}$
14) $\frac{3+6i}{1-i}$
15) $\frac{i}{2-3i}$

№ 4 Выполните действие:

1) $\frac{(2+3i)-(5+7i)}{2+3i}$
2) $\frac{(2+3i)+(4-i)}{1+3i}$
3) $\frac{2+3i}{3-2i}+\frac{5+3i}{3+2i}$
4) $\frac{(6+3i)-(5+i)}{9+i}$
5) $\frac{(4+3i)-(2-i)}{1+3i}$
6) $\frac{2+3i}{1-2i}+\frac{5+3i}{2+5i}$
7) $\frac{(6+3i)}{9+i}+i^{27}$
8) $i^{123}+(1-i)^2$
9) $\frac{2+3i}{2i}+i^8$

§14. Матрица. Действия над матрицами

14.1 Определение матрицы. Виды матриц

Матрицей размером $m\times n$ называется совокупность $m\cdot n$ чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов. Эту таблицу обычно заключают в круглые скобки. Например, матрица может иметь вид:

$$\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \pi & 1 \end{pmatrix}},\quad \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & \sqrt{2} & 0 \\ 1.5 & 3 & -1 \end{pmatrix}},\quad \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}},\quad \underset{1\times 1}{(4)}$$

Для краткости матрицу можно обозначать одной заглавной буквой, например, A или B.

В общем виде матрицу размером $m\times n$ записывают так

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа, составляющие матрицу, называются *элементами матрицы*. Элементы матрицы удобно снабжать двумя индексами a_{ij}: первый указывает номер строки, а второй – номер столбца. Например, a_{23} – элемент стоит во 2-ой строке, 3-м столбце.

Если в матрице число строк равно числу столбцов, то матрица называется *квадратной,* причём число ее строк или столбцов называется *порядком* матрицы. В приведённых выше примерах квадратными являются вторая матрица – её порядок равен 3, и четвёртая матрица – её порядок 1.

Матрица, в которой число строк не равно числу столбцов, называется *прямоугольной*. В примерах это первая матрица и третья.

Различаются также матрицы, имеющие только одну строку или один столбец.

Матрица, у которой всего одна строка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$, называется *матрицей – строкой* (или строковой), а матрица, у которой всего один столбец, *матрицей – столбцом*.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается (0), или просто 0. Например,

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Главной диагональю квадратной матрицы назовём диагональ, идущую из левого верхнего в правый нижний угол.

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 3 & -1 \\ 0 & \underline{2} & -2 \\ 4 & 1 & \underline{3} \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица, у которой все элементы, лежащие ниже главной диагонали, равны нулю, называется *треугольной* матрицей.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме, быть может, стоящих на главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной* матрицей. Например, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице, называется *единичной* матрицей и обозначается буквой Е. Например, единичная матрица 3-го порядка имеет вид $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

14.2 Действия над матрицами

Равенство матриц. Две матрицы A и B называются равными, если они имеют одинаковое число строк и столбцов и их соответствующие элементы равны $a_{ij} = b_{ij}$. Так если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, то $A=B$, если $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$ и $a_{22} = b_{22}$.

Транспонирование. Рассмотрим произвольную матрицу A из m строк и n столбцов. Ей можно сопоставить такую матрицу B из n строк и m столбцов, у которой каждая строка является столбцом матрицы A с тем же номером (следовательно, каждый столбец является строкой матрицы A с тем же номером). Итак, если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

то $B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & \dots & a_{m2} \\ . & . & . \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Эту матрицу B называют *транспонированной* матрицей A, а переход от A к B *транспонированием*.

Таким образом, транспонирование – это перемена ролями строк и столбцов матрицы. Матрицу, транспонированную к матрице A, обычно обозначают A^T.

Связь между матрицей A и её транспонированной можно записать в виде $a_{ij}^T = a_{ji}$.

Например. Найти матрицу транспонированную данной.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Сложение матриц. Пусть матрицы A и B состоят из одинакового числа строк и одинакового числа столбцов, т.е. имеют <u>одинаковые размеры</u>. Тогда для того, чтобы сложить матрицы *A* и *B* нужно к элементам матрицы *A* прибавить элементы матрицы *B*, стоящие на тех же местах. Таким образом, суммой двух матриц *A* и *B* называется матрица *C*, которая определяется по правилу, например,

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$$

или

$$(c_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$$

Примеры. Найти сумму матриц:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ - нельзя, т.к. размеры матриц различны.
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Легко проверить, что сложение матриц подчиняется следующим законам: коммутативному *A*+*B*=*B*+*A* и ассоциативному (*A*+*B*)+*C*=*A*+(*B*+*C*).

Умножение матрицы на число. Для того чтобы умножить матрицу *A* на число *k* нужно каждый элемент матрицы *A* умножить на это число. Таким образом, произведение матрицы *A* на число *k* есть новая матрица, которая определяется по правилу $kA=k\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \\ ka_{31} & ka_{32} \end{pmatrix}$ или $(c_{ij})=(ka_{ij})$.

Для любых чисел *a* и *b* и матриц *A* и *B* выполняются равенства:

1. $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$
2. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
3. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.

Примеры.

1. $-2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ 2 & -4 & -8 \\ -4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.
2. Найти 2A-B, если $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$2A-B=\begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\ 4 & 0 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & -2 & -3\\ -1 & 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 5\\ 5 & -4 & -5\end{pmatrix}.$$

3. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}.$ Найти $C=-3A+4B$.

Матрицу C найти нельзя, т.к. матрицы A и B имеют разные размеры.

Умножение матриц. Эта операция осуществляется по своеобразному закону. Прежде всего, заметим, что размеры матриц–сомножителей должны быть согласованы. Перемножать можно только те матрицы, у которых число столбцов первой матрицы совпадает с числом строк второй матрицы (т.е. длина строки первой равна высоте столбца второй). *Произведением* матрицы A не матрицу Bназывается новая матрица $C=AB$, элементы которой составляются следующим образом:

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}\end{pmatrix}.$$

Таким образом, например, чтобы получить у произведения (т.е. в матрице C) элемент, стоящий в 1-ой строке и 3-м столбце c_{13}, нужно в 1-ой матрице взять 1-ую строку, во 2-ой – 3-й столбец, и затем элементы строки умножить на соответствующие элементы столбца и полученные произведения сложить. И другие элементы матрицы-произведения получаются с помощью аналогичного произведения строк первой матрицы на столбцы второй матрицы.

В общем случае, если мы умножаем матрицу $A = (a_{ij})$ размера $m\times n$ на матрицу $B = (b_{ij})$ размера $n\times p$, то получим матрицу C размера $m\times p$, элементы которой вычисляются следующим образом: элемент c_{ij} получается в результате произведения элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B и их сложения.

Из этого правила следует, что всегда можно перемножать две квадратные матрицы одного порядка, в результате получим квадратную матрицу того же порядка. В частности, квадратную матрицу всегда можно умножить саму на себя, т.е. возвести в квадрат.

Другим важным случаем является умножение матрицы–строки на матрицу–столбец, причём ширина первой должна быть равна высоте второй, в результате получим матрицу первого порядка (т.е. один элемент). Действительно,

$$\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\end{pmatrix}.$$

Примеры.

1. Пусть $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 3 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad C=AB.$

   Найти элементы c_{12}, c_{23} и c_{21} матрицы C.

   $$c_{12}=0-2+3=1,\quad c_{23}=0+0+1=1,\quad c_{21}=0-3+1=-2.$$

2. Найти произведение матриц.

   $$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+2 & 4+1\\ 3+2+2 & 6+1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 7 & 9\end{pmatrix}.$$

3. $$\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-2+2 & -3-2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -7\end{pmatrix}.$$

4. $\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$ - нельзя, т.к. ширина первой матрицы равна 2-м элементам, а высота второй – 3-м.

5. Пусть $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}.$

   Найти AB и BA.

   $$AB=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 8 & -1\end{pmatrix}.$$

6. $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}.$

   Найти AB и BA.

   $AB=\begin{pmatrix}-3\\ -7\end{pmatrix}$, $B\cdot A$ – не имеет смысла.

Таким образом, эти простые примеры показывают, что матрицы, вообще говоря, не перестановочны друг с другом, т.е. $\underline{A\cdot B\neq B\cdot A}$. Поэтому при умножении матриц нужно тщательно следить за порядком множителей.

Можно проверить, что умножение матриц подчиняется ассоциативному и дистрибутивному законам, т.е. $(AB)C=A(BC)$ и $(A+B)C=AC+BC$.

Легко также проверить, что при умножении квадратной матрицы A на единичную матрицу E того же порядка вновь получим матрицу A, причём $AE=EA=A$.

Можно отметить следующий любопытный факт. Как известно произведение 2-х отличных от нуля чисел не равно 0. Для матриц это может не иметь места, т.е. произведение 2-х не нулевых матриц может оказаться равным нулевой матрице.

Например, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, то

$$A \cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

14.3 Понятие определителей

Пусть дана матрица второго порядка – квадратная матрица, состоящая из двух строк и двух столбцов $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Определителем второго порядка, соответствующим данной матрице, называется число, получаемое следующим образом: $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определитель обозначается символом $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Итак, для того чтобы найти определитель второго порядка нужно из произведения элементов главной диагонали вычесть произведение элементов по второй диагонали.

Примеры. Вычислить определители второго порядка.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=-8-15=-23$
2. $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=0+6=6$.
3. Вычислить определитель матрицы D, если $D= -A+2B$ и

$$A=\begin{pmatrix} 11 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} -11 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 14 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 17 & 0 \end{pmatrix}, \quad |D|=0.$$

Аналогично можно рассмотреть матрицу третьего порядка и соответствующий ей определитель.

Определителем третьего порядка, соответствующим данной квадратной матрице третьего порядка, называется число, обозначаемое и получаемое следующим образом:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, эта формула даёт разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки a_{11}, a_{12}, a_{13} и сводит вычисление определителя третьего порядка к вычислению определителей второго порядка.

Примеры. Вычислить определитель третьего порядка.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 3\cdot(-1) - 4\cdot 2 = 3$.
2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 + 2\cdot 4 = 9$.
3. Решите уравнение. $\begin{vmatrix} x+3 & 2+x & 4 \\ 3 & x-1 & 3 \\ 4 & x & 4 \end{vmatrix} = 0$.

$$(x+3)\begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ x & 4 \end{vmatrix} - (2+x)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & x-1 \\ 4 & x \end{vmatrix} = 0.$$

$(x+3)(4x-4-3x)+4(3x-4x+4)=0.$

$(x+3)(x-4)+4(-x+4)=0.$

$(x-4)(x-1)=0.$

$x_1 = 4$, $x_2 = 1$.

Аналогично можно ввести понятия определителей четвёртого, пятого и т.д. порядков, понижая их порядок разложением по элементам 1-ой строки, при этом знаки "+" и "–" у слагаемых чередуются.

Итак, в отличие от матрицы, которая представляют собой таблицу чисел, определитель это число, которое определённым образом ставится в соответствие матрице.

§15. Матрица как запись коэффициентов системы линейных уравнений

Систему из mуравнений с nнеизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

можно представить в матричном виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

и тогда всю систему можно записать так:

$$AX = B,$$

где Aимеет смысл таблицы коэффициентов a_{ij}системы уравнений.

Если $m = n$ и матрица A невырожденная, то решение этого уравнения состоит в нахождении обратной матрицы A^{-1}, поскольку умножив обе части уравнения на эту матрицу слева

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$A^{-1}A$— превращается в E(единичную матрицу). И это даёт возможность получить столбец корней уравнений

$$X = A^{-1}B.$$

Все правила, по которым проводятся операции над матрицами, выводятся из операций над системами уравнений.

15.1. Матричный метод решения

Пусть дана система из 3-х уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Рассмотрим матрицу системы $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ и матрицы столбцы неизвестных и свободных членов $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$

Найдем произведение

$$AX=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix},$$

т.е. в результате произведения мы получаем левые части уравнений данной системы. Тогда пользуясь определением равенства матриц данную систему можно записать в виде

$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ или короче $A \cdot X = B$.

Здесь матрицы A и B известны, а матрица X неизвестна. Её и нужно найти, т.к. её элементы являются решением данной системы. Это уравнение называют матричным уравнением.

Пусть определитель матрицы отличен от нуля $|A| \neq 0$. Тогда матричное уравнение решается следующим образом. Умножим обе части уравнения слева на матрицу A^{-1}, обратную матрице A: $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$ или $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$. Поскольку $A^{-1}A = E$ и $E \cdot X = X$, то получаем решение матричного уравнения в виде $X = A^{-1}B$.

Заметим, что поскольку обратную матрицу можно найти только для квадратных матриц, то матричным методом можно решать только те системы, в которых <u>число уравнений совпадает с числом неизвестных</u>. Однако, матричная запись системы возможна и в случае, когда число уравнений не равно числу неизвестных, тогда матрица A не будет квадратной и поэтому нельзя найти решение системы в виде $X = A^{-1}B$.

15.1. Правило Крамера

Рассмотрим систему 3-х линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Определитель третьего порядка, соответствующий матрице системы, т.е. составленный из коэффициентов при неизвестных,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

называется определителем системы.

Составим ещё три определителя следующим образом: заменим в определителе D последовательно 1, 2 и 3 столбцы столбцом свободных членов

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Тогда можно доказать следующий результат.

Теорема (правило Крамера). Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то рассматриваемая система имеет одно и только одно решение, причём

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

<u>Доказательство</u>. Итак, рассмотрим систему 3-х уравнений с тремя неизвестными. Умножим 1-ое уравнение системы на алгебраическое дополнение A_{11} элемента a_{11}, 2-ое уравнение – на A_{21} и 3-е – на A_{31}:

$$\begin{cases} A_{11}a_{11}x_1 + A_{11}a_{12}x_2 + A_{11}a_{13}x_3 = A_{11}b_1, \\ A_{21}a_{21}x_1 + A_{21}a_{22}x_2 + A_{21}a_{23}x_3 = A_{21}b_2, \\ A_{31}a_{31}x_1 + A_{31}a_{32}x_2 + A_{31}a_{33}x_3 = A_{31}b_3. \end{cases}$$

Сложим эти уравнения:

$$(A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + A_{31}a_{31})x_1 + (A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + A_{31}a_{32})x_2 +$$
$$+ (A_{11}a_{13} + A_{21}a_{23} + A_{31}a_{33})x_3 = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}.$$

Рассмотрим каждую из скобок и правую часть этого уравнения. По теореме о разложении определителя по элементам 1-го столбца

$$A_{11}a_{11}+A_{21}a_{21}+A_{31}a_{31}=\Delta.$$

Далее рассмотрим коэффициенты при x_2:

$$A_{11}a_{12}+A_{21}a_{22}+A_{31}a_{32}=a_{12}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{22}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{32}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & 23\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{12} & a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=0.$$

Аналогично можно показать, что и $A_{11}a_{13}+A_{21}a_{23}+A_{31}a_{33}=0$.

Наконец несложно заметить, что

$$b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31}=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\Delta_1.$$

Таким образом, получаем равенство: $\Delta\cdot x_1=\Delta_1$.

Следовательно, $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}$.

Аналогично выводятся равенства $\Delta\cdot x_2=\Delta_2$ и $\Delta\cdot x_3=\Delta_3$, откуда и следует утверждение теоремы.

Таким образом, заметим, что если определитель системы $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение и обратно. Если же определитель системы равен нулю, то система либо имеет бесконечное множество решений, либо не имеет решений, т.е. несовместна.

Примеры. Решить систему уравнений

1.
$$\begin{cases}x+2y-z=2,\\ 2x-3y+2z=2,\\ 3x+y+z=8.\end{cases}\qquad \Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -3 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}=-5+2\cdot 4-11=-8\neq 0.$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}2 & 2 & -1\\ 2 & -3 & 2\\ 8 & 1 & 1\end{vmatrix}=-10+28-26=-8,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 8 & 1\end{vmatrix}=-14+8-10=-16,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & -3 & 2\\ 3 & 1 & 8\end{vmatrix}=-26-20+22=-24.$$

Итак, x=1, y=2, z=3.

2. Решите систему уравнений при различных значениях параметра p:
$$\begin{cases} px + 30y = p + 30, \\ 30x + py = 0. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение, если $\Delta \neq 0$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & 30 \\ 30 & p \end{vmatrix} = p^2 - 30^2 \neq 0$$
. Поэтому $p \neq \pm 30$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} p+30 & 30 \\ 0 & p \end{vmatrix} = p(p+30), \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} p & p+30 \\ 30 & 0 \end{vmatrix} = -30(p+30).$$

1. При $p \neq \pm 30 \quad x = \dfrac{p(p+30)}{p^2-30^2} = \dfrac{p}{p-30}, \quad y = \dfrac{-30(p+30)}{p^2-30^2} = \dfrac{-30}{p-30}.$
2. При p = 30 получаем систему уравнений $\begin{cases} 30x + 30y = 60, \\ 30x - 30y = 0, \end{cases}$ которая не имеет решений.
3. При p = –30 система принимает вид $\begin{cases} -30x + 30y = 0, \\ 30x - 30y = 0, \end{cases}$ и, следовательно, имеет бесконечное множество решений x=y, y□R.
4.

15.2. Метод Гаусса

Ранее рассмотренные методы можно применять при решении только тех систем, в которых число уравнений совпадает с числом неизвестных, причём определитель системы должен быть отличен от нуля. Метод Гаусса является более универсальным и пригоден для систем с любым числом уравнений. Он заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы.

Вновь рассмотрим систему из трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Первое уравнение оставим без изменения, а из 2-го и 3-го исключим слагаемые, содержащие x_1. Для этого второе уравнение разделим на a_{21} и умножим на $-a_{11}$, а затем сложим с 1-ым уравнением. Аналогично третье уравнение разделим на a_{31} и умножим на $-a_{11}$, а затем сложим с первым. В результате исходная система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ \quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ \quad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3. \end{cases}$$

Теперь из последнего уравнения исключим слагаемое, содержащее x_2. Для этого третье уравнение разделим на a'_{32}, умножим на $-a'_{22}$ и сложим со вторым. Тогда будем иметь систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ \quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ \qquad a''_{33}x_3 = b''_3. \end{cases}$$

Отсюда из последнего уравнения легко найти x_3, затем из 2-го уравнения x_2 и, наконец, из 1-го – x_1.

При использовании метода Гаусса уравнения при необходимости можно менять местами.

Часто вместо того, чтобы писать новую систему уравнений, ограничиваются тем, что выписывают расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

и затем приводят её к треугольному или диагональному виду с помощью элементарных преобразований.

К элементарным преобразованиям матрицы относятся следующие преобразования:

1. перестановка строк или столбцов;
2. умножение строки на число, отличное от нуля;
3. прибавление к одной строке другие строки.

Примеры: Решить системы уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases}3x-3y+2x=2,\\4x-5y+2z=1,\\5x-6y+4z=3.\end{cases}$$

1. $$\left(\begin{array}{ccc|c}3&-3&2&2\\4&-5&2&1\\5&-6&4&3\end{array}\right)\begin{array}{c}\times(-4)\\ \times(3)^{+}\\ \end{array}\left|\begin{array}{c}\times5\\ +\\ \times3\end{array}\right.\left(\begin{array}{ccc|c}3&-3&2&2\\0&-3&-2&-5\\0&-3&2&-1\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \times(-1)\\ +\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}3&-3&2&2\\0&-3&-2&-5\\0&0&4&4\end{array}\right)$$

Вернувшись к системе уравнений, будем иметь

$$\begin{cases}3x-3y+2x=2, & x=1,\\-3y-2z=-5, & y=1,\\4z=4. & z=1.\end{cases}$$

2. $$\begin{cases}3x-2y+3z=5,\\x-5y+2z=3,\\2x+3y+z=0.\end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы и сведем ее к треугольному виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&-2&3&5\\1&-5&2&3\\2&3&1&0\end{array}\right),\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&-5&2&5\\3&-2&3&3\\2&3&1&0\end{array}\right)\begin{array}{c}\times(-3)\\ +\\ \end{array}\left|\begin{array}{c}\times(-2)\\ \\ +\end{array}\right.\left(\begin{array}{ccc|c}1&-5&2&5\\0&13&-3&-12\\0&13&-3&-10\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ -\\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-5&2&5\\0&13&-3&-12\\0&0&0&-2\end{array}\right).$$

Вернувшись к системе уравнений, несложно заметить, что третье уравнения системы будет ложным, а значит, система решений не имеет.

3. $$\begin{cases}2x+3y-z=3,\\4x+6y-2z=6,\\3x-y+2z=-1.\end{cases}\qquad\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&-1&3\\4&6&-2&6\\3&-1&2&-1\end{array}\right).$$

Разделим вторую строку матрицы на 2 и поменяем местами первый и третий столбики. Тогда первый столбец будет соответствовать коэффициентам при неизвестной z, а третий – при x.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&3&2&3\\-1&3&2&3\\2&-1&3&-1\end{array}\right)\begin{array}{c}-\\ \\ \end{array}\left|\begin{array}{c}\times2\\ +\\ \end{array}\right.\left(\begin{array}{ccc|c}-1&3&2&3\\0&0&0&0\\0&5&7&5\end{array}\right).$$

Вернемся к системе уравнений. $$\begin{cases}2x+3y-z=3,\\0=0,\\7x+5y=5.\end{cases}$$

Из третьего уравнения выразим одну неизвестную через другую и подставим в первое.

$$\begin{cases} y = 1 - \frac{7}{5}x, \\ 2x + 3 - \frac{21}{5}x - z = 3, \end{cases} \quad \textit{или} \quad \begin{cases} y = 1 - \frac{7}{5}x, \\ z = -\frac{11}{5}x. \end{cases}$$

Таким образом, система имеет бесконечное множество решений.

Упражнения:

Решить систему:

1) $\begin{cases} 5x + y - 3z = 2 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \\ 2x - 3y + z = 17 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ x + 3y - 4z = -11 \\ 3x + 2y - z = 7 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 19 \\ 4x + 5y - 3z = 31 \\ 3x + 7y - 4z = 31 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x + 3y + 2z = 1 \\ 2x - 5y - 3z = 16 \\ 3x + 2y + 4z = 4 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5x - 3y + 4z = 11 \\ 2x - y - 2z = -6 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x + y - 2z = 6 \\ 5x - 3y + 2z = -4 \\ 4x - 2y - 3z = -2 \end{cases}$

7) $\begin{cases} -x + 2y + z = 7 \\ 3x - y + 6z = 19 \\ -4x + 3y - z = 8 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x + 7y + 13z = 0 \\ 3x + 14y + 12z = 18 \\ 5x + 25y + 16z = 39 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 4x - y + 5z = -3 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = -1 \\ x + 3y + z = 2 \end{cases}$

11) $\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 19 \\ 4x + 5y - 3z = 31 \\ 3x + 7y - 4z = 31 \end{cases}$

12) $\begin{cases} 4x + y - 2z = 10 \\ -x + 3y + 5z = -1 \\ 3x - y + 5z = 1 \end{cases}$

13) $\begin{cases} 3x+4y+2z=5 \\ 5x-6y-4z=-3 \\ -4x+5y+3z=1 \end{cases}$ 14) $\begin{cases} 10x & +y & +4z & =1 \\ x & -2y & -7z & =-3 \\ 2x & +y & +5z & =0 \end{cases}$

Раздел V. Основные понятия дискетной математики

§16. Множества и операции над ними

16.1. Множества

Одно из основных понятий математики – множество.

Определение:

Множеством называется совокупность, набор предметов, объектов или элементов.

Множество обозначают: M,N …..
m_1, m_2, m_n – элементы множества.

Символика
$A \in M$ – принадлежность элемента к множеству;
$A \notin M$ – непринадлежность элемента к множеству.

Примеры числовых множеств:
1,2,3,… множество натуральных чисел N;
…,-2,-1,0,1,2,… - множество целых чисел Z.
$\frac{N}{M}$ множество рациональных чисел a.
I – множество иррациональных чисел.
R – множество действительных чисел.
K – множество комплексных чисел.

Множество A называется подмножеством B, если всякий элемент A является элементом B.
$A \subseteq B$ – A подмножество B (нестрогое включение)

Множества A и B равны, если их элементы совпадают.

A = B

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$ то $A \subset B$ (строгое включение).

Множества бывают конечные и бесконечные.

|M| - мощность множества (число его элементов).

Конечное множество имеет конечное количество элементов.

Пустое множество не содержит элементов: М = ∅.

Пример: пустое множество:

1) множество действительных корней уравнения $x^2+1=0$ пустое: М = ∅.
2) множество Δ, сумма углов которого ≠ 180^0 пустое: М = ∅.

Если дано множество Е и множество и мы рассматриваем все его подмножества, то множество Е называется униварсельным.

Пример: Если за Е взять множество книг то его подмножества: художественные книги, книги по математике, физики, физики …

Если универсальное множество состоит из n элементов, то число подмножеств = 2^n.

Если $A \subset E => \overline{A}$, состоящее из элементов Е, не принадлежащих А, называется дополненным.

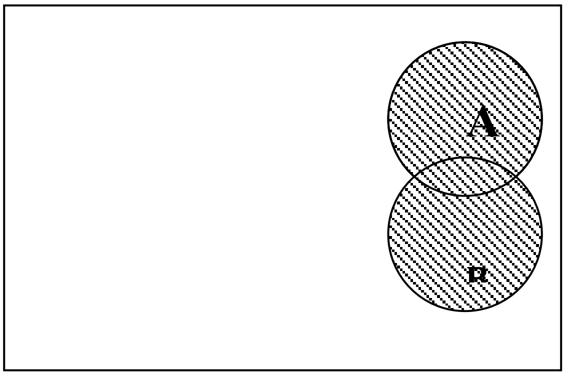
Множество можно задать:
1) Списком элементов {a,b,c,d,e};
2) Интервалом 1<x<5;
3) Порождающей процедурой: $x_k=\pi k$ sinx=0;

16.2. Операции над множествами

Объединение множеств А и В (союз или). Множество, состоящие из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств А или В называется объединенным. А ∪ В

Отношение множеств наглядно иллюстрируется с помощью диаграмм Венна.

Диаграмма Венна – это замкнутая линия, внутри которой расположены элементы множества.

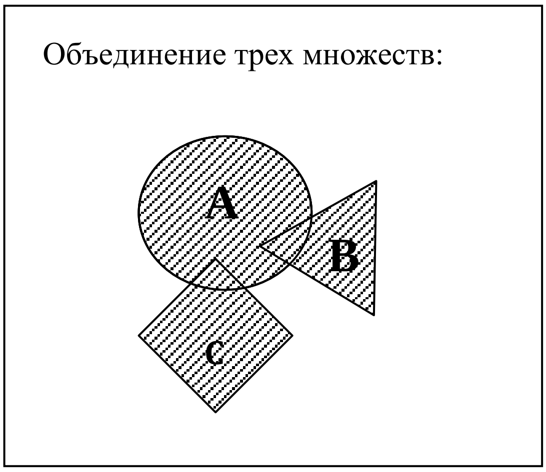


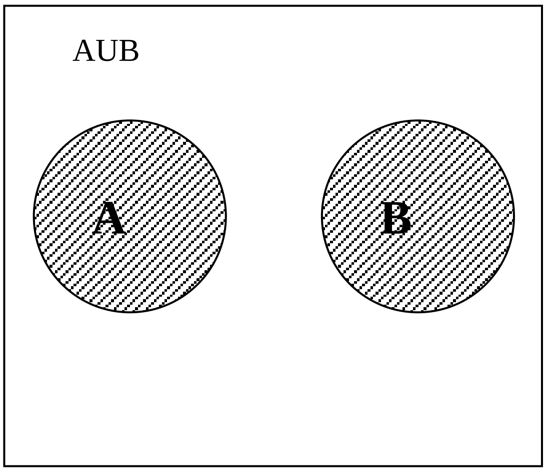
Объединение двух множеств
Объединение системы множеств можно записать

$\bigcup_{i=1}^{n} M_i$ - объединение системы n множеств.

Пример: объединение множеств, когда они заданы списком.

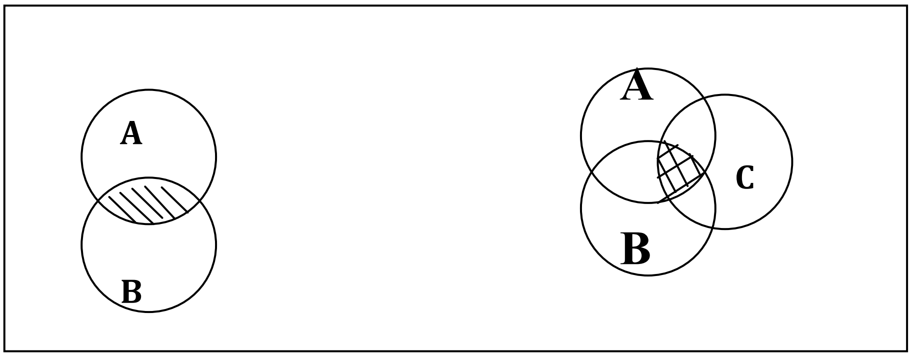
A = {a,b,d} B = {b,d,e,h} AUB = {a,b,c,d,e,h}





2) Пересечением множеств А и В называется множество, состоящие из элементов принадлежащих одновременно множествам А и В.

$A \cap B$



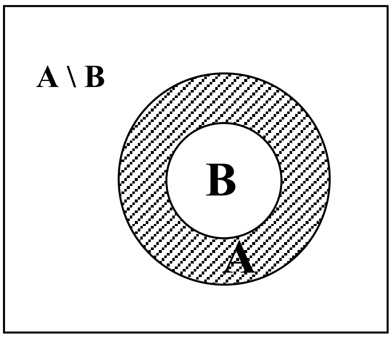
16.3. Пересечение прямой и плоскости

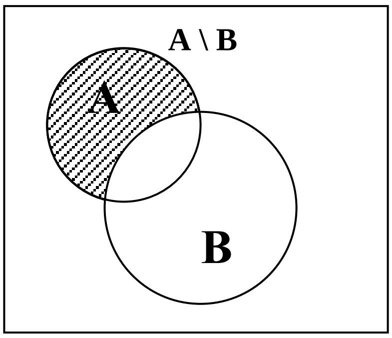
1) если прямые ∦ пл., то множество пересечений – единственная точка;
2) если прямые II пл., то $M \neq \varnothing$;
3) если прямые совпадают, то множество пересечений = множество прямой.

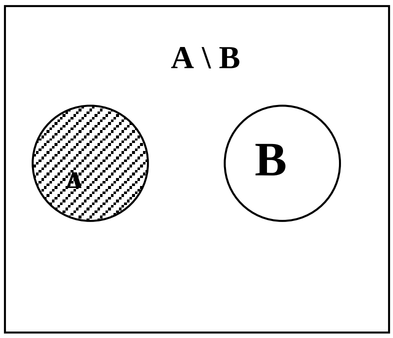
Пересечение системы множеств: $\bigcap_{i=1}^{n} Mi$

4) Разностью 2-х множеств А и В называется множество, состоящее из всех элементов А, не входящих в В.

C = A \ B







A = {a,b,d}; B = {b,c,d,h} C = A \ B={a}.

В отличии от предыдущих операций разность: 1) строго двухместна;

2) не коммутативна, т.е. A\B ≠ B\A.

4) дополнение $\overline{A} = E \setminus A$

E – универсальное множество.

$\overline{A}$ -- дополнение

Операции объединения, пересечения и дополнения называются **Булевыми.**

16.4. Основные законы операций над множествами.

Некоторые свойства ∪, ∩ похожи на алгебраические операции, однако многие свойства операций над множествами все же отличаются.

16.5. Основные свойства

1) AUB=BUA; A∩B=B∩A – переместительный закон объединения и пересечения.

2) (AUB)UC = AU(BUC); (A∩B)∩C=A∩(B∩C) – сочетательный закон.
3) AU∅=A, A∩∅=∅, A \ ∅=A, A \ A=∅

4) $\overline{\overline{A}} = A$; $A \cup \overline{A} = E$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$; E \ A = $\overline{A}$; A \ E=∅; AUA=A; A∩A=A; AUE=E; A∩E=A;
5) A∩(BUC)=(A∩B)(A∩C) – есть аналогичный распределительный закон ∩ относительно U.

Упражнения:

1. Среди перечисленных формул выбрать тождественно истинные

1) p→p 2) p v p 3) p↔p

2. Найдите множество истинности предиката Q(x): Sin x=0

3. Найти логическое значение X и Y, при которых выполняется равенство (1→x)→y=0

4. Пусть x=0, y=1, z=1. Определить логическое значение формулы ((x ^ y) ^ z)↔((x ^ z) v (y ^ x))

5. Даны 2 предиката P(x): «X – четное число», Q(x): «X – кратное 3». Найдите предикат P(x) → Q(x)

6. Заполняя подходящие таблицы истинности, докажите законы де Моргана.

7. Опираясь на законы булевой алгебры, проверьте соотношения:

((p ^ q) ^ (r v (p ^ q))) = p v q.

8. Заполните таблицу истинности булева выражения

(p ^ ($\overline{q}$ v r)) v ($\overline{p}$ ^ (q v $\overline{r}$)) и найдите его дизъюнктивную нормальную форму.

9. Запишите выражение (p ^ $\overline{q}$) ^ r, используя только:

(a) операции v и ‾;

10. Обозначим через x слово «кошка», а через P(x) предикат «у x есть усы». Запишите каждое из высказываний в символьной форме:

(а) усы есть у всех кошек;

(б) найдется кошка с усами;

(в) не бывает кошек с усами.

Запишите отрицание высказывания (б) в символьной форме, а отрицание высказывания (в) запишите как символами, так и словами.

11. Пусть P(x) означает «x высокий», а Q(x) – «x толстый», где x – какой-то человек. Прочитайте высказывание:

$\forall$ x (P(x) и Q(x)).

Найдите его отрицание среди следующих утверждений:

(а) найдется некто короткий и толстый;

(б) нет никого высокого и худого;

(в) найдется некто короткий или худой.

12. Определим операцию «*» по формуле:

$A*B = (\overline{A \cap B})$.

Изобразите на диаграмме Венна множество A*B. С помощью законов алгебры множеств докажите тождества:

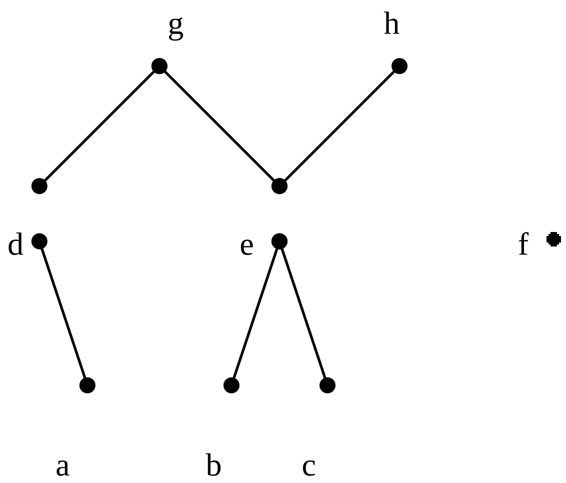
(а) $A*A = \overline{A}$;

(б) $(A*A)*(B*B) = A \cup B$;

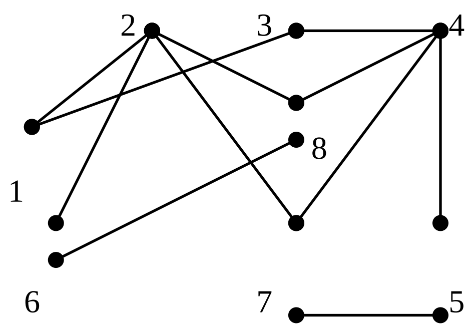
(в) $(A \cup B \cup C) \cap (A \cup B \cup C) \cap (A \cup C) = \varnothing$;

(г) $(A*B)*(A*B) = A \cap B$.

13. Диаграмма Хассе частичного порядка R на множества A = {a, b, c, d, e, f, g, h} показана на рисунке. Перечислите элементы R и найдите максимальный и минимальный элементы частично упорядоченного множества A.



14. Найдите гамильтоновы циклы в графе.



Найдите в нем циклы длины 3, 4, 5, 6 и 7.

15. Матрица смежности орграфа G имеет вид

$$\text{м} = \begin{bmatrix} \text{Л} & \text{И} & \text{Л} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{И} & \text{Л} \\ \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} & \text{И} \\ \text{И} & \text{Л} & \text{Л} & \text{Л} \end{bmatrix}$$

Вычислите M^2, M^3 и M^4. Найдите матрицу достижимости M^*.

РАЗДЕЛ VI. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ

§17. Случайные события. Частота. Вероятность

Теория вероятностей — математическая наука, изучающая закономерности массовых случайных явлений (событий).

Случайным событием (или просто событием) называется всякое явление, которое может произойти или не произойти при осуществлении определенной совокупности условий. Теория вероятностей имеет дело с такими событиями, которые имеют массовый характер. Это значит, что данная совокупность условий может быть воспроизведена неограниченное число раз. Каждое такое осуществление данной совокупности условий называют испытанием (или опытом).

Если, например, испытание состоит в бросании монеты, то выпадение герба является событием; если испытание — изготовление подшипника данного типа, то соответствие подшипника стандарту — событие; если испытание — бросание игральной кости, т. е. кубика, на гранях которого проставлены цифры (очки) от 1 до 6, то выпадение пятерки — событие.

События будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C, ...
Пусть при n испытаниях событие A появилось m раз.
Отношение m/n называется частотой (относительной частотой) события A и обозначается $P^*(A)=m/n$
Опыт показывает, что при многократном повторении испытаний частота $P^*(A)$ случайного события обладает устойчивостью.

Событие называется достоверным, если оно в данном опыте обязательно должно произойти; наоборот, событие называется невозможным, если оно в данном опыте не может произойти.

Пусть, например, из урны, содержащей только черные шары, вынимают шар. Тогда появление черного шара — достоверное событие; появление белого шара — невозможное событие.
Если событие достоверно, то оно произойдет при каждом испытании ($m=n$). Поэтому частота достоверного события всегда равна единице. Наоборот, если событие невозможно, то оно ни при одном испытании не осуществится ($m=0$). Следовательно, частота невозможного события в любой серии испытаний равна нулю. Поэтому вероятность достоверного события равна единице, а вероятность невозможного события равна нулю.

Если событие A не является ни достоверным, ни невозможным, то его частота m/n при большом числе испытаний будет мало отличаться от некоторого числа

p (где $0 < p < 1$) — вероятности события A.
Совмещением (или произведением) двух событий A и B называется событие, состоящее в совместном наступлении как события A, так и события B. Это событие будем обозначать AB или BA.

Аналогично, совмещением нескольких событий, например A, B и C, называется событие $D=ABC$, состоящее в совместном наступлении событий A, B и C.
Объединением (или суммой) двух событий A и B называется событие C, заключающееся в том, что произойдет по крайней мере одно из событий A или B. Это событие обозначается так: $C=A+B$.

Объединением нескольких событий называется событие, состоящее в появлении по крайней мере одного из них. Запись D=A+B+C означает, что событие D есть объединение событий A, B и C.

Два события A и B называются несовместными, если наступление события A исключает наступление события B. Отсюда следует, что если события A и B несовместны, то событие AB — невозможное.

17.1. Аксиомы вероятностей

Пусть A и B — два несовместных события, причем в n испытаниях событие A произошло m1 раз, а событие B произошло m2 раз. Тогда частоты событий A и B соответственно равны P*(A)=m1/n, P*(B)=m2/n. Так как события A и B несовместны, то событие A+B в данной серии опытов произошло m1+m2 раз. Следовательно,

$$P^*(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P^*(A)+P^*(B)$$

Таким образом, частота события A+B равна сумме частот событий A и B. Но при больших n частоты P*(A), P*(B) и P*(A+B) мало отличаются от соответствующих вероятностей P(A), P(B) и P(A+B). Поэтому естественно принять, что если A и B — несовместные события, то P(A+B)=P(A)+P(B)

Изложенное позволяет высказать следующие свойства вероятностей, которые мы принимаем в качестве аксиом.

Аксиома 1. Каждому случайному событию A соответствует определенное число P(A), называемое его вероятностью и удовлетворяющее условию $0 \le P(A) \le 1$.

Аксиома 2. Вероятность достоверного события равна единице.

Аксиома 3 (аксиома сложения вероятностей). Пусть A и B — несовместные события. Тогда вероятность того, что произойдет хотя бы одно из этих двух событий, равна сумме их вероятностей:

P(A+B)=P(A)+P(B) (1)

Аксиома 3 допускает обобщение на случай нескольких событий, а именно: если события A1, A2, ..., An, попарно несовместны, то

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n) \qquad (2)$$

Событием, противоположным событию A, называется событие $\overline{A}$, состоящее в ненаступлении события A. Очевидно, события A и $\overline{A}$ несовместны.

Пусть, например, событие A состоит в том, что изделие удовлетворяет стандарту; тогда противоположное событие $\overline{A}$ заключается в том, что изделие стандарту не удовлетворяет. Пусть событие A — выпадение четного числа очков при однократном бросании игральной кости; тогда A — выпадение нечетного числа очков.

Теорема 1. Для любого события A вероятность противоположного события $\overline{A}$ выражается равенством

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \qquad (3)$$

Доказательство. Событие $A+\overline{A}$, состоящее в наступлении или события A, или события $\overline{A}$, очевидно, является достоверным. Поэтому на основании аксиомы 2 имеем P($A+\overline{A}$)=1. Так как события A и $\overline{A}$ несовместны, то используя аксиому 3, получим P(A $+\overline{A}$)=P(A)+P($\overline{A}$). Следовательно, P(A)+P($\overline{A}$)=1, откуда $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Теорема 2. Вероятность невозможного события равна нулю.

Доказательство непосредственно следует из аксиомы 2 и теоремы 1, если заметить, что невозможное событие противоположно достоверному событию.

17.2. Классическое определение вероятности

Как было сказано выше, при большом числе n испытаний частота P*(A)=m/n появления события A обладает устойчивостью и дает приближенное значение вероятности события A, т.е. $P(A) \approx P^*(A)$.

Это обстоятельство позволяет находить приближенно вероятность события опытным путем. Практически такой способ нахождения вероятности события не всегда удобен. В ряде случаев вероятность события удается определить до опыта с помощью понятия равновероятности событий (или равновозможности).

Два события называются равновероятными (или равновозможными), если нет никаких объективных причин считать, что одно из них может наступить чаще, чем другое.

Так, например, появления герба или надписи при бросании монеты представляют собой равновероятные события.

Рассмотрим другой пример. Пусть бросают игральную кость. В силу симметрии кубика можно считать, что появление любой из цифр 1, 2, 3, 4, 5 или 6 одинаково возможно (равновероятно).

События E1,E2, ..., EN в данном опыте образуют полную группу, если в результате опыта должно произойти хотя бы одно из них. Так, в последнем примере полная группа событий состоит из шести событий — появлений цифр 1, 2, 3, 4, 5 и 6.

Очевидно, любое событие А и противоположное ему событие $\overline{A}$ образуют полную группу.

Событие В называется благоприятствующим событию А, если наступление события В влечет за собой наступление события А.

Так, если А — появление четного числа очков при бросании игральной кости, то появление цифры 4 представляет собой событие, благоприятствующее событию А.

Пусть события E1,E2, ..., EN в данном опыте образуют полную группу равновероятных и попарно несовместных событий. Будем называть их исходами испытания. Предположим, что событию А благоприятствуют М исходов испытания. Тогда вероятностью события А в данном опыте называют отношение M/N. Итак, мы приходим к следующему определению.

Вероятностью Р(А) события в данном опыте называется отношение числа М исходов опыта, благоприятствующих событию А, к общему числу N возможных исходов опыта, образующих полную группу равновероятных попарно несовместных событий:

$$P(A) = \frac{M}{N}$$

Это определение вероятности часто называют классическим. Можно показать, что классическое определение удовлетворяет аксиомам вероятности.

Пример 1. На завод привезли партию из 1000 подшипников. Случайно в эту партию попало 30 подшипников, не удовлетворяющих стандарту. Определить вероятность Р(А) того, что взятый наудачу подшипник окажется стандартным.

Решение: Число стандартных подшипников равно 1000—30=970. Будем считать, что каждый подшипник имеет одинаковую вероятность быть выбранным. Тогда полная группа событий состоит из N=1000 равновероятных исходов, из которых событию А благоприятствуют М=970 исходов. Поэтому Р(А)=М/N=970/1000=0.97

Пример 2. В урне 10 шаров: 3 белых и 7 черных. Из урны вынимают сразу два шара. Какова вероятность р того, что оба шара окажутся белыми?

Решение: Число N всех равновероятных исходов испытания равно числу способов, которыми можно из 10 шаров вынуть два, т. е. числу сочетаний из 10 элементов по 2:

$$N = C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = 45$$

Число благоприятствующих исходов:

$$M = C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$$

Следовательно, искомая вероятность

$$p = \frac{M}{N} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$$

Пример 3. В урне 2 зеленых, 7 красных, 5 коричневых и 10 белых шаров. Какова вероятность появления цветного шара?

Решение: Находим соответственно вероятности появления зеленого, красного и коричневого шаров:
Р(зел.)=2/24; Р(кр.)=7/24; Р(кор.)=5/24. Так как рассматриваемые события, очевидно, несовместны, то, применяя аксиому сложения, найдем вероятность появления цветного шара:

$$P(цв.) = P(зел.) + P(кр.) + P(кор.) = \frac{2}{24} + \frac{7}{24} + \frac{5}{24} = \frac{7}{12}$$

17.3. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей

Во многих задачах приходится находить вероятность совмещения событий А и В, если известны вероятности событий А и В.

Рассмотрим следующий пример. Пусть брошены две монеты. Найдем вероятность появления двух гербов. Мы имеем 4 равновероятных попарно несовместных исхода, образующих полную группу:

	1 монета	2 монета
1 исход	герб	герб
2 исход	герб	надпись
3 исход	надпись	герб
4 исход	надпись	надпись

Таким образом, Р(герб,герб)=1/4. Пусть теперь нам стало известно, что на первой монете выпал герб. Как изменится после этого вероятность того, что герб появится на обеих монетах? Так как на первой монете выпал герб, то теперь полная группа состоит из двух равновероятных несовместных исходов:

	1 монета	2 монета
1 исход	герб	герб
2 исход	герб	надпись

При этом только один из исходов благоприятствует событию (герб, герб). Поэтому при сделанных предположениях Р(герб,герб)=1/2. Обозначим через А появление двух гербов, а через В — появление герба на первой монете. Мы видим, что вероятность события А изменилась, когда стало известно, что событие В произошло.

Новую вероятность события А, в предположении, что произошло событие В, будем обозначать РВ(А).

Таким образом, Р(А)=1/4; РВ(А)=1/2

Теорема умножения. Вероятность совмещения событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие осуществилось, т. е.

Р(АВ)=Р(А)РА(В) (4)

Доказательство. Докажем справедливость соотношения (4), опираясь на классическое определение вероятности. Пусть возможные исходы Е1, Е2, ..., ЕN данного опыта образуют полную группу равновероятных попарно несовместных событий, из которых событию А благоприятствуют М исходов, и пусть из этих М исходов L исходов благоприятствуют событию В. Очевидно, что совмещению событий А и В благоприятствуют L из N возможных результатов испытания. Это дает

$$P(A) = \frac{M}{N};\quad P(AB) = \frac{L}{N};\quad P_A(B) = \frac{L}{M}$$

Таким образом,

$$P(AB) = \frac{L}{N} = \frac{M}{N}\cdot\frac{L}{M} = P(A)\cdot P_A(B)$$

Поменяв местами А и В, аналогично получим

$$P(AB) = P(B)P_B(A) \qquad (5)$$

Из формул (4) и (5) имеем

$$P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A) \qquad (6)$$

Теорема умножения легко обобщается на любое , конечное число событий. Так, например, в случае трех событий А1, А2, А3 имеем *

$$P(A_1A_2A_3) = P[(A_1A_2)A_3)] = P(A_1A_2)P_{A_1A_2}(A_3) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)$$

В общем случае

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)...P_{A_1A_2...A_{n-1}}(A_n) \quad (7)$$

Введем теперь следующее определение. Два события A и B называются независимыми, если предположение о том, что произошло одно из них, не изменяет вероятность другого, т. е. если

$$P_B(A) = P(A) \text{ и } P_A(B) = P(B) \quad (8)$$

Из соотношения (6) вытекает, что из двух равенств (8) одно является следствием другого.

Пусть, например, событие A — появление герба при однократном брссании монеты, а событие B — появление карты бубновой масти при вынимании карты из колоды. Очевидно, что события A и B независимы. В случае независимости событий A к B формула (4) примет более простой вид:

$$P(AB) = P(A)P(B) \quad (9)$$

т. е. вероятность совмещения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

События A1, A2, ..., An называются независимыми в совокупности, если вероятность наступления каждого из них не меняет своего значения после того, как одно или несколько из остальных событий осуществились.

Исходя из этого определения, в случае независимости событий A1, A2, ..., An между собой в совокупности на основании формулы (7) имеем

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2)...P(A_n) \quad (10)$$

Пример 1. Какова вероятность того, что при десятикратном бросании монеты герб выпадет 10 раз ?

Решение: Пусть событие Ai — появление герба при i-м бросании. Искомая вероятность есть вероятность совмещения всех событий Ai (i=1,2,3,...,10), а так как они, очевидно, независимы в совокупности, то применяя формулу (10), имеем

$$P(A_1A_2...A_{10}) = P(A_1)P(A_2)...P(A_{10})$$

Но P(Ai)=1/2 для любого i; поэтому

$$P(A_1A_2...A_{10}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024} \approx 0{,}001$$

Пример 2. Рабочий обслуживает три станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, для первого станка равна 0,9, для второго — 0,8, для третьего — 0,7. Найти: 1) вероятность р того, что в течение часа ни один из трех станков не потребует внимания рабочего; 2) вероятность того, что в течение часа по крайней мере один из станков не потребует внимания рабочего.

Решение:

1) Искомую вероятность р находим по формуле (10):

$$p = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}504$$

2) Вероятность того, что в течение часа станок потребует внимания рабочего для первого станка равна 1—0,9=0,1, для второго и для третьего станков она соответственно равна 1—0,8=0,2 и 1—0,7=0,3. Тогда вероятность того, что в течение часа все три станка потребуют внимания рабочего, на основании формулы (10) составляет

$$0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}006$$

Событие А, заключающееся в том, что в течение часа все три станка потребуют внимания рабочего, противоположно событию $\bar{A}$, состоящему в том, что по крайней мере один из станков не потребует внимания рабочего. Поэтому по формуле (3) получаем

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}006 = 0{,}994$$

Пример 3. Из урны, содержащей 3 белых и 7 черных шаров, вынимают два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми ?

Решение: Эта задача уже была решена в п. 3 с помощью классического определения вероятности. Решим ее, применяя формулу (5). Извлечение двух шаров равносильно последовательному их извлечению. Обозначим через А появление белого шара при первом извлечении, а через В — при втором. Событие, состоящее в появлении двух белых шаров, является совмещением событий А и В. По формуле (5) имеем

$$P(AB) = P(A)P_A(B)$$

Но P(A)=3/10; PA(B)=2/9, поскольку после того, как был вынут первый белый шар, в урне осталось 9 шаров, из которых 2 белых. Следовательно,

$$P(AB) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$$

17.4. Формула полной вероятности

Пусть событие А может произойти только вместе с одним из попарно несовместных событий H1, H2, ..., Hn, образующих полную группу. Тогда, если произошло событие А, то это значит, что произошло одно из попарно несовместных событий H1A, H2A, ..., HnA. Следовательно,

$$A = H_1A + H_2A + \ldots + H_nA$$

Применяя аксиому сложения вероятностей, имеем

$$P(A) = P(H_1A + H_2A + \ldots + H_nA) = P(H_1A) + P(H_2A) + \ldots + P(H_nA)$$

Но $P(H_iA) = P(H_i)P_{Hi}(A)$ (i=1, 2, ..., n), поэтому

$$P(A) = P(H_1)P_{H1}(A) + P(H_2)P_{H2}(A) + \ldots + P(H_n)P_{Hn}(A) \quad (11)$$

Эта формула называется формулой полной вероятности. События H1, H2, ..., Hn часто называют «гипотезами».

Пример. В магазин поступили электрические лампочки одного типа, изготовленные на четырех ламповых заводах: с 1-го завода 250 шт., со 2-го — 525 шт., с 3-го — 275 шт. и с 4-го — 950 шт. Вероятность того, что лампочка прогорит более 1500 часов, для 1-го завода равна 0,15, для 2-го — 0,30, для 3-го — 0,20, для 4-го — 0,10. При раскладке по полкам магазина лампочки были перемешаны. Какова вероятность того, что купленная лампочка прогорит более 1500 часов?

Решение: Пусть А — событие, состоящее в том, что лампочка прогорит более 1500 часов, а H1, H2, H3 и H4 — гипотезы, что она изготовлена соответственно 1, 2, 3 или 4-м заводом. Так как всего лампочек 2000 шт., то вероятности гипотез соответственно равны

$$P(H_1) = \frac{250}{2000} = 0,125$$

$$P(H_2) = \frac{525}{2000} = 0,2625$$

$$P(H_3) = \frac{275}{2000} = 0,1375$$

$$P(H_4) = \frac{950}{2000} = 0,475$$

Далее, из условия задачи следует, что

$$P_{H1}(A) = 0,15$$

$$P_{H2}(A) = 0,3$$

$$P_{H3}(A) = 0,2$$

$$P_{H4}(A) = 0,1$$

Используя формулу полной вероятности (11), имеем

$$P(A) = 0,125 \times 0,15 + 0,2625 \times 0,3 + 0,1375 \times 0,2 + 0,475 \times 0,1 = 0,1725$$

17.5. Формула Бейеса

Предположим, что производится некоторый опыт, причем об условиях его проведения можно высказать n единственно возможных и несовместных гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$, имеющих вероятности $P(H_i)$. Пусть в результате опыта может произойти или не произойти событие А, причем известно, что если опыт происходит при выполнении гипотезы H_i, то $P_{H_i}(A) = p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

Спрашивается, как изменятся вероятности гипотез, если стало известным, что событие А произошло? Иными словами, нас интересуют значения вероятностей $P_A(H_i)$ На основании соотношений (4) и (5) имеем

$$P(H_i A) = P_A(H_i)P(A) = P_{H_i}(A)P(H_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

откуда

$$P_A(H_i) = \frac{P_{H_i}(A)P(H_i)}{P(A)}$$

Но по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n)P_{H_n}(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k)p_k$$

Поэтому

$$P_A(H_i) = \frac{P_{H_i}(A)P(H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(H_k)p_k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (12)$$

Формула (12) называется формулой Бейеса*.

Пример. На склад поступило 1000 подшипников. Из них 200 изготовлены на 1-м заводе, 460—на 2-м и 340 - на 3-м. Вероятность того, что подшипник окажется нестандартным, для 1-го завода равна 0,03, для 2-го — 0,02, для 3-го — 0,01. Взятый наудачу подшипник оказался н естандартным. Какова вероятность того, что он изготовлен 1-м заводом?

Решение: Пусть А — событие, состоящее в том, что взятый Подшипник нестандартный, а H_1, H_2, H_3 - гипотезы, что он изготовлен соответственно 1-м, 2-м или 3-м заводом. Вероятности указанных гипотез составляют

$$P(H_1) = \frac{200}{1000} = 0,2$$

$$P(H_2) = \frac{460}{1000} = 0,46$$

$$P(H_3) = \frac{340}{1000} = 0,34$$

Из условия задачи следует, что

$$p_1 = P_{H_1}(A) = 0,03$$

$$p_2 = P_{H_2}(A) = 0,02$$

$$p_3 = P_{H_3}(A) = 0,01$$

Найдем $P_A(H_1)$, т. е. вероятность того, что подшипник, оказавшийся нестандартным, изготовлен 1-м заводом. По формуле Бейеса имеем

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1)p_1}{P(H_1)p_1 + P(H_2)p_2 + P(H_3)p_3} = \frac{0,2 \cdot 0,03}{0,2 \cdot 0,03 + 0,46 \cdot 0,02 + 0,34 \cdot 0,01} \approx 0,322$$

Таким образом, вероятность гипотезы, что подшипник изготовлен 1-м заводом, изменилась после того, как стало известно, что он нестандартен.

17.6. Последовательные испытания. Формула Бернули

Предположим, что производится n независимых испытаний, в результате каждого из которых может наступить или не наступить некоторое событие А. Пусть при каждом испытании вероятность наступления события А равна P(A)=p и, следовательно, вероятность противоположного события (ненаступления А) равна $P(\overline{A}) = 1 - p = q$. Определим вероятность Pn(m) того, что событие А произойдет m раз при n испытаниях. При этом заметим, что наступления или ненаступления события А могут чередоваться различным образом. Условимся записывать возможные результаты испытаний в виде комбинаций букв А и $\overline{A}$. Например, запись $A\overline{A}\overline{A}A$ означает, что в четырех испытаниях событие осуществилось в 1-м и 4-м случаях и не осуществилось во 2-м и 3-м случаях.

Всякую комбинацию, в которую А входит m раз и $\overline{A}$ входит n-m раз, назовем благоприятной. Количество благоприятных комбинаций равно количеству k способов, которыми можно выбрать m чисел из данных n; таким образом, оно равно числу сочетаний из n элементов по m, т.е.

$$k = C_n^m$$

Подсчитаем вероятности благоприятных комбинаций. Рассмотрим сначала случай, когда событие А происходит в первых m испытаниях и, следовательно, не происходит в остальных n-m испытаниях. Такая благоприятная комбинация имеет следующий вид:

$$B_1 = \underbrace{AA\ldots A}_{m\ раз}\underbrace{\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}}_{n-m\ раз}$$

Вероятность этой комбинации в силу независимости испытаний (на основании теоремы умножения вероятностей) составляет

$$P(B_1) = \underbrace{P(A)\,P(A)\ldots P(A)}_{m\ раз}\,\underbrace{P(\bar{A})\,P(\bar{A})\ldots P(\bar{A})}_{n-m\ раз} = p^m q^{n-m}$$

Так как в любой другой благоприятной комбинации Bi событие А встречается также m раз, а событие $\bar{A}$ происходит n-m раз, то вероятность каждой из таких комбинаций также равна $p^m q^{n-m}$. Итак

$$P(B_1) = P(B_2) = \ldots = P(B_k) = p^m q^{n-m}$$

Все благоприятные комбинации являются, очевидно, несовместными. Поэтому (на основании аксиомы сложения вероятностей)

$$P_n(m) = P(B_1 + B_2 + \ldots + B_k) = P(B_1) + P(B_2) + \ldots + P(B_k) = kp^m q^{n-m} = C_n^m p^m q^{n-m}$$

Следовательно,

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \qquad (13)$$

или,

так как $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ то

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} \qquad (13')$$

Формула (13) называется формулой Бернулли *.

Пример 1. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Какова вероятность того, что 8 выстрелов дадут 5 попаданий?

Решение:

Здесь

n=8;

m=5;

p=0,6;

q=1-0,6=0,4.

Используя формулу (13'), имеем

$$P_8(5) = \frac{8!}{5!(8-5)!}(0,6)^5 \cdot (0,4)^3 \approx 0,28$$

Пример 3. Игральную кость бросают 80 раз. Определить вероятность того, что цифра 3 появится 20 раз.

Решение:

Здесь

m=20;

n=80;

p=1/6;

q=1-1/6=5/6;

далее находим

$$\sqrt{npq} = \sqrt{80 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \frac{10}{3}$$

$$x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{20-80(1/6)}{10/3} = 2$$

Используя формулу (15), получим

$$P_{80}(20) \approx \frac{1}{10/3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(2)^2/2} = \frac{3}{10} \cdot 0,054 = 0,0162$$

так как из табличного значения находим, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(2)^2/2} = \varphi_0(2) = 0,054$$

Упражнения:

1. В партии из 23 деталей находятся 10 бракованных. Вынимают из партии наудачу две детали. Используя классическое определение теории вероятности определить, какова вероятность того, что обе детали окажутся бракованными.

2. В ящике лежат шары: 4 белых, 10 красных, 8 зеленых, 9 коричневых. Из ящика вынимают один шар. Пользуясь теоремой сложения вероятностей определить, какова вероятность, что шар окажется цветным (не белым) ?

3. В вопросах к зачету имеются 75% вопросов, на которые студенты знают ответы. Преподаватель выбирает из них два вопроса и задает их студенту. Определить вероятность того, что среди полученных студентом вопросов есть хотя бы один, на который он знает ответ

4. На складе находятся 26 деталей из которых 13 стандартные. Рабочий берет наугад две детали. Пользуясь теоремой умножения вероятностей зависимых событий определить вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

5. В сборочный цех поступили детали с трех станков. На первом станке изготовлено 51% деталей от их общего количества, на втором станке 24% и на третьем 25%. При этом на первом станке было изготовлено 90% деталей первого сорта, на втором 80% и на третьем 70%. Используя формулу полной вероятности определить, какова вероятность того, что взятая наугад деталь окажется первого сорта?

6. Имеется три одинаковых по виду ящика. В первом ящике находится 26 белых шаров, во втором 15 белых и 11 черных, в третьем ящике 26 черных шаров. Из выбранного наугад ящика вынули белый шар. Используя формулу Байеса вычислить вероятность того, что белый шар вынут из первого ящика.

7. Вероятность изготовления нестандартной детали равна 0.11. Пользуясь формулой Бернулли найти вероятность того, что из пяти наудачу взятых деталей будут четыре стандартных.

Литература:

Основная:

1. Писменный Д. «Конспектлекций по высшей математике», Москва, Айрис–Пресс, 2010
2. Щипачев В.С. Основы высшей математики. - М: Высшая школа. 2008
3. Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы: Учеб. пособие.- М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2008 – 288с.: ил.
4. Акимов О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы / О.Е. Акимов. – 2-е изд., доп.- М.: Лаборатория Базовых знаний, 2003.- 376 с.: ил.

Дополнительные источники:

5. Колягин Ю.М. и др. Математика (Книга 1). - М., 2008
6. Колягин Ю.М. и др. Математика (Книга 2). ~~ М., 2008
7. Ниворожкина ЛИ., Морозова З.А., Герасимова И.А., Житников И.В. Основы статистики с элементами теории вероятностей для экономистов: Руководство для решения задач. - Ростов н/Д: Феникс, 2001
8. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. Учебное пособие. - М.: Высшая школа 2010.
9. Омельченко В.Т., Курбатова Э.В. Математика. Феникс 2005